فصل

۲۸

معادله‌های ماکسول؛ خواص مغناطیسی ماده

بخش ۲۸-۲ قانون گاؤس درباره‌ی میدان‌های مغناطیسی

۱•- شار مغناطیسی که از هر یک از پنج وجه یک تاس می‌گذرد با $\Phi_B = \pm N$ Wb داده می‌شود که (۵ تا ۱ =) N تعداد نقطه‌های روی وجه است. شار برای N زوج مثبت (به سمت خارج) و برای N فرد منفی (به سمت داخل است). شاری که از وجه ششم تاس می‌گذرد چقدر است؟

حل: شاری که از سطح بسته می‌گذرد صفر است.

$$\Phi_{\text{کل}} = \Phi_۱ + \Phi_۲ + \Phi_۳ + \Phi_۴ + \Phi_۵ + \Phi_۶$$

$$-۱+۲-۳+۴-۵+\Phi_۶ = ۰ \Rightarrow \Phi_۶ = ۳ = \text{Wb}$$

۲•- شکل ۲۸-۲۶ سطح بسته‌ای را نشان می‌دهد. به طرف جلوی وجه تخت بالایی که دارای شعاع ۲/۰cm است یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ به بزرگی ۰/۳۰T عمود و به طرف خارج برقرار است. از وجه تخت پایین شار مغناطیسی ۰/۷۰mWb به طرف خارج می‌گذرد. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج) شار مغناطیسی که از سطح خمیدهٔ بدنه می‌گذرد.

شکل ۲۸-۲۶ مسئلهٔ ۲

حل: (الف) و (ب) شاری که از هر سطح بسته می‌گذرد صفر است، پس:

$$\Phi = \Phi_۱ + \Phi_۲ + \Phi_۳ = ۰$$

$$(۰/۳)(۳/۱۴)(۲\times۱۰^{-۲})^۲ + ۰/۷\times۱۰^{-۳} + \Phi_۳ = ۰$$

$$\Phi_۳ = -۱/۱\times۱۰^{-۳}\ \text{Wb}$$

علامت منفی نشان می‌دهد، شار به سمت داخل است.

۳••- ILW SSM یک سطح گاؤسی به شکل استوانهٔ دایره‌ای قائم، دارای شعاع ۱۲/۰cm و طول ۸۰/۰cm است. از یک

انتهای استوانه شار مغناطیسی ۲۵/۰μWb به طرف داخل می‌گذرد. در انتهای دیگر یک میدان مغناطیسی یکنواخت ۱/۶۰mT، عمود بر سطح و به طرف خارج وجود دارد. مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف بالا یا به طرف پایین) شار مغناطیسی خالص از میان بدنهٔ خمیده.

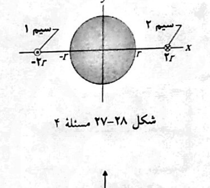
حل: $\Phi = \Phi_۱ + \Phi_۲ + \Phi_۳ = ۰$ کل

$$-۲۵\times۱۰^{-۶} + (۱/۶\times۱۰^{-۳})(۳/۱۴)(۰/۱۲)^۲ + \Phi_۳ = ۰$$

$$\Phi_۳ = -۴/۷۴\times۱۰^{-۵}\ \text{Wb}$$

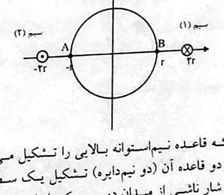
علامت منفی نشان می‌دهد، شار به طرف داخل است.

•••۴- دو سیم موازی با محور z به فاصلهٔ $۴r$ از یکدیگر مطابق شکل ۲۸-۲۷ حامل جریان‌های یکسان i در جهت‌های مخالف‌اند. استوانه‌ای با مقطع دایره‌ای به شعاع r و طول L، محورش روی محور z و وسط دو سیم قرار دارد. با استفاده از قانون گاوس برای مغناطیس، شار مغناطیسی خروجی خالصی را که از نصف سطح استوانه در بالای محور x می‌گذرد محاسبه کنید. (*راهنمایی:* شار عبوری از آن بخش از صفحهٔ xz را که داخل استوانه است پیدا کنید.)



شکل ۲۸-۲۷ مسئلهٔ ۴

حل:

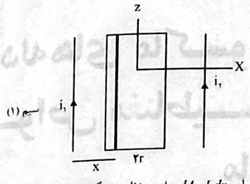


سطحی که قاعده نیم‌استوانه بالایی را تشکیل می‌دهد، و مجموعه دو قاعده آن (دو نیم‌دایره) تشکیل یک سطح بسته می‌دهند. شار ناشی از میدان دو سیم که از این نیم‌استوانه می‌گذرد برابر است با:

$$\Phi = \Phi_۱ + \Phi_۲ + \Phi_۳ + \Phi_۴ = ۰$$

$\Phi_۱$ شاری که از سطح استوانه‌ای شکل بالایی می‌گذرد و $\Phi_۲$ نیز شاری که از سطح تخت قاعده نیم‌استوانه می‌گذرد. $\Phi_۳$ و $\Phi_۴$ صفر هستند زیرا خطوط میدان ناشی از دو سیم از این دو سطح (سطوح قاعده) نمی‌گذرد.

$$\Phi_۱ = -\Phi_۲$$



عنصر سطح $dA = Ldr$ را در نظر می‌گیریم. شار سیم (۱) که از آن می‌گذرد.

$$d\Phi = B_۱ dA = \frac{\mu_۰}{۲\pi x} L dx \quad \text{سیم (۱)}$$

$$\Phi = \frac{\mu_۰ iL}{۲\pi}\int_{x=+r}^{۳r}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_۰ iL}{۲\pi}\ln ۳ \quad \text{سیم (۱)}$$

$$\Phi = ۲\frac{\mu_۰ iL}{۲\pi}\ln ۳ = \frac{\mu_۰ iL}{\pi}\ln ۳ \quad \text{دو سیم}$$

بخش ۲۸-۳ میدان‌های مغناطیسی القا شده

•۵- SSM میدان مغناطیسی القا شده در فاصلهٔ شعاعی ۶/۰mm از محور مرکزی یک خازن صفحه- موازی دایره‌ای برابر $۲/۰\times۱۰^{-۷}$ T است. شعاع صفحه‌ها ۳/۰mm است. با چه آهنگ $d\vec{E}/dt$، میدان الکتریکی بین صفحه‌ها در حال تغیر است؟

حل:

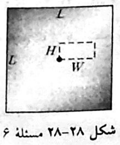
از مسئله نمونه ۲۸-۱ داریم $r > R$

$$B = \frac{\mu_۰\varepsilon_۰ R^۲}{۲r}\frac{dE}{dt}$$

$$۲\times۱۰^{-۷} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۳\times۱۰^{-۳})^۲}{۲(۶\times۱۰^{-۳})}\times\frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = ۲/۴\times۱۰^{۱۳}\ \text{V/m}\cdot\text{s}$$

•۶- خازنی با صفحه‌های مربعی شکل به ضلع L با جریان ۰/۷۵A تخلیه می‌شود. شکل ۲۸-۲۸ نمای از بالای یکی از صفحه‌ها را از داخل خازن نشان می‌دهد. یک مسیر مستطیلی شکل خط چین نشان داده شده است. اگر $L = ۱۲$cm، $W = ۴/۰$cm و $H = ۲/۰$cm باشند، مقدار $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ دور مسیر خط‌چین چقدر است؟



شکل ۲۸-۲۸ مسئلهٔ ۶

حل: $\oint_c \vec{B}\cdot\vec{ds} = \mu_۰ i'_d$

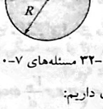
که i'_d جریان تخلیه‌ای است که از درون حلقه آمپر می‌گذرد.

$$\frac{i_d\ \text{کل}}{L^۲} = \frac{i'_d}{H.W} \Rightarrow i'_d = \frac{H.W}{L^۲} i_d$$

$$i_d = \frac{(۲)(۴)}{(۱۲)^۲}(۰/۷۵) = ۰/۰۴۲\text{A}$$

$$\oint_c B\cdot ds = (۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۰۴۲) = ۵/۲۸\times۱۰^{-۸}\ \text{T}\cdot\text{m}$$

••۷- *شار الکتریکی یکنواخت*. شکل ۲۸-۲۹ ناحیه‌ای دایره‌ای با شعاع $R = ۳/۰۰$cm را نشان می‌دهد که شار الکتریکی یکنواختی به طرف خارج صفحهٔ کاغذ از آن می‌گذرد. شار الکتریکی کل از این ناحیه با رابطهٔ $\Phi_E = (۳/۰۰\text{mV}\cdot\text{m/s})t$ داده می‌شود که t برحسب ثانیه است. بزرگی میدان مغناطیسی که در فاصله‌های (الف) ۲/۰۰cm و (ب) ۵/۰۰cm القا می‌شود چقدر است؟



شکل ۲۸-۳۲ مسئله‌های ۷-۱۰ و ۱۹-۲۲

حل: از رابطه ماکسول داریم:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{ds} = \varepsilon_۰\mu_۰\frac{d\Phi_E}{dt}$$

$r < R$

$$B۲\pi r = \varepsilon_۰\mu_۰(۳\times۱۰^{-۳})\frac{\pi r^۲}{\pi R^۲} \Rightarrow B = \frac{(۳\times۱۰^{-۳})\varepsilon_۰\mu_۰ r}{۲\pi R^۲}$$

نکته: در مواردی که میدان ثابت نیست، از روابط ۳۲-۸ و ۳۲-۹ نمی‌توان استفاده نمود.

(الف) برای $r = ۲$cm داریم:

$$B = \frac{(۳\times۱۰^{-۳})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۴\pi\times۱۰^{۷})(۲\times۱۰^{-۲})}{(\pi)(۵\times۱۰^{-۲})^۲}$$

$$= ۱/۱۸\times۱۰^{-۱۹}\ \text{T}$$

(ب) برای نقاط خارج از این ناحیه $r > R$ داریم:

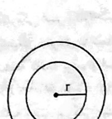
$$B = \frac{\mu_۰\varepsilon_۰(۳\times۱۰^{-۳})}{۲\pi r}$$

$$B_{(r)} = \frac{(۳\times۱۰^{-۳})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۴\pi\times۱۰^{-۷})}{(۲\pi)(۵\times۱۰^{-۲})}$$

$$= ۱/۰۶\times۱۰^{-۱۹}\ \text{T}$$

••۸- *شار الکتریکی غیر یکنواخت:* شکل ۲۸-۲۹ ناحیه‌ای دایره‌ای با شعاع $R = ۳/۰۰$cm را نشان می‌دهد که شار در بر گرفته شده الکتریکی به طرف خارج از صفحهٔ کاغذ از آن می‌گذرد. شار با یک دایره هم مرکز به شعاع r با رابطهٔ $(\Phi_{E,enc} = ۰/۶۰۰\ \text{Vm.s})(r/R)t$ که آن $r \le R$ و t برحسب ثانیه است داده می‌شود. بزرگی میدان مغناطیسی القا شده در فاصله‌های شعاعی (الف) ۲/۰۰cm و (ب) ۵/۰۰cm چقدر است؟

حل:



قانون القا ماکسول را برای مسیر دایره‌ای به کار می‌گیریم

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{ds} = \varepsilon_۰\mu_۰\frac{d\Phi}{dt}$$

(الف) برای ناحیه $r < R$ داریم:

$$B۲\pi r = \varepsilon_۰\mu_۰\,۰/۶\frac{r}{R} \Rightarrow B = \frac{۰/۶\varepsilon_۰\mu_۰}{۲\pi R}$$

$$B = \frac{(۰/۶)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۴\pi\times۱۰^{-۷})}{(۲\pi)(۳\times۱۰^{-۲})} = ۳/۵۴\times۱۰^{-۱۷}\ \text{T}$$

(ب) برای $r > R$ داریم:

شار فقط از ناحیه $r = R$ عبور می‌کند، پس شار کل برابر است با:

$$\Phi = (۰/۶)\left(\frac{R}{R}\right)t = ۰/۶t$$

$$\oint_C B\cdot ds = \mu_۰\varepsilon_۰\frac{d\Phi}{dt}$$

$$B۲\pi r = \mu_۰\varepsilon_۰(۰/۶) \Rightarrow B = \frac{(۰/۶)\mu_۰\varepsilon_۰}{۲\pi r}$$

$$B = \frac{(۰/۶)(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})}{(۲\pi)(۵\times۱۰^{-۲})} = ۲/۱۳\times۱۰^{-۱۷}\ \text{T}$$

••۹- *میدان الکتریکی یکنواخت*. در شکل ۲۸-۲۹ میدان الکتریکی یکنواختی در ناحیه‌ای دایره‌ای با شعاع $R = ۳/۰۰$cm به طرف خارج از صفحهٔ کاغذ برقرار است. بزرگی میدان الکتریکی با رابطهٔ $E = (۴/۵۰\times۱۰^{-۳}\ \text{V/m.s})t$ داده می‌شود که در آن t برحسب ثانیه است. بزرگی میدان مغناطیسی القا شده در فاصله‌های شعاعی (الف) ۲/۰۰cm و (ب) ۵/۰۰cm چقدر است؟

حل: $\frac{dE}{dt} = ۴/۵\times۱۰^{-۳}\ \text{V/m}\cdot\text{s}$

(الف) برای $r < R$ از مسئله نمونه ۲۸-۱ داریم:

$$B_r = \frac{۱}{۲}\mu_۰\varepsilon_۰ r\frac{dE}{dt}$$

$$B = \frac{۱}{۲}(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۲\times۱۰^{-۲})(۴/۵\times۱۰^{-۳})$$

$$= ۵\times۱۰^{-۲۲}\ \text{T}$$

(ب) برای $r > R$ از رابطه (۳۲-۹) داریم:

$$B_r = \frac{\mu_۰\varepsilon_۰ R^۲}{۲r}\frac{dE}{dt}$$

$$B = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۹\times۱۰^{۴})}{(۲)(۵\times۱۰^{-۲})}(۴/۵\times۱۰^{-۳})$$

$$= ۴/۵\times۱۰^{-۲۲}\ \text{T}$$

۱۰●●- ميدان الكتريكى غير يكنواخت. در شكل ۲۸-۲۹ ميدان الكتريكى در ناحيه‌اى دايره‌اى با شعاع $R = 3.00\ \text{cm}$ به طرف خارج از صفحهٔ كاغذ برقرار است. بزرگى ميدان الكتريكى با رابطهٔ $E = (0.500\ \text{V/m.s})(1-r/R)t$ داده مى‌شود كه در آن t برحسب ثانيه است. بزرگى ميدان مغناطيسى القا شده در فاصله‌هاى شعاعى (الف) $2.00\ \text{cm}$ و (ب) $5.00\ \text{cm}$ چقدر است؟

حل:

$$\Phi_E = \oint E\,dA = \int_{r=0}^{r}\frac{1}{2}\left(1-\frac{r}{R}\right)t\,2\pi r\,dr = \pi t\int_{r=0}^{r}\left(r-\frac{r^2}{R}\right)dr$$

$$= \pi t\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3R}\right)$$

(الف)

$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{ds} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0\varepsilon_0\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3R}\right)$$

$$2\pi rB = \mu_0\varepsilon_0\frac{r^2}{2}\left(1-\frac{2r}{3R}\right) \Rightarrow B = \frac{\mu_0\varepsilon_0 r}{4}\left(1-\frac{2r}{3R}\right)$$

$$B = \frac{(4\pi\times10^{-7})(8.85\times10^{-12})(2\times10^{-2})}{4}\left(1-\frac{4}{9}\right)$$

$$= 3.09\times10^{-20}\ \text{T}$$

(ب) برای $r \geq R$ شار فقط از ناحيه $r=R$ می‌گذرد.

$$\Phi_E = \pi t\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^3}{3R}\right) = \frac{\pi t R^2}{6}$$

$$2\pi rB = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\pi R^2}{6}$$

$$B = \mu_0\varepsilon_0\frac{R^2}{12r}$$

$$B = (4\pi\times10^{-7})(8.85\times10^{-12})\frac{9\times10^{-4}}{12(5\times10^{-2})}$$

$$= 1.67\times10^{-20}\ \text{T}$$

۱۱●●- فرض كنيد يک خازن صفحه - موازى داراى صفحه‌هاى دايره‌اى به شعاع $R = 30\ \text{mm}$ و فاصلهٔ صفحه‌ها $5.0\ \text{mm}$ است. همچنين فرض كنيد كه يک اختلاف پتانسيل سينوسى با مقدار بيشينهٔ $150\ \text{V}$ و بسامد $60\ \text{Hz}$ به دو صفحه اعمال شده است؛ يعنى

$$V = (150)\sin[2\pi(60)t]$$

(الف) $B_{max}(R)$ يعنى، مقدار بيشينهٔ ميدان مغناطيسى القا شده در $r = R$ را به دست آوريد. (ب) $B_{max}(r)$ را به ازاى $0 < r < 10\ \text{cm}$ رسم كنيد.

حل: (الف) از مسئله نمونه ۲۸-۱ برای $r=R$ داريم:

$$B_m(R) = \frac{\mu_0\varepsilon_0 R}{2}\frac{dE}{dt}$$

$$E = \frac{V}{d} = \frac{V_m}{d}\sin\omega t$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{V_m}{d}\omega\cos\omega t = \frac{(150)}{(5\times10^{-3})}(120)(3.14)$$

$$= 1.13\times10^{7}\ \text{V/m}\cdot\text{s}$$

كه در آن در مورد B_m جمله $\sin\omega t = 1$ در نظر گرفته شده است.

$$B_m(R) = \frac{(4\pi\times10^{-7})(8.85\times10^{-12})(30\times10^{-3})}{2}\times$$

$$(1.13\times10^{7}) = 1.88\times10^{-12}\ \text{T}$$

(ب) برای $r \geq R$ داريم:

$$B_{(r)} = \frac{\mu_0\times\varepsilon_0 R^2}{2r}\frac{dE}{dt} = \frac{\mu_0\varepsilon_0 R^2}{2r}\frac{V_m}{d}\omega\cos\omega t$$

$$B_{m(r)} = \frac{\mu_0\varepsilon_0 R^2}{2r}\frac{V_m}{d}\omega = B_m(R)\frac{R}{r} = \frac{(1.88)(30)}{r} = \frac{56.4}{r}(PT)$$

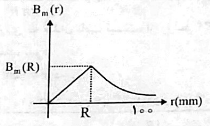
كه در آن r بايد برحسب ميليمتر قرار گيرد.

برای $r \leq R$ داريم:

$$B(r) = \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 r\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 r\frac{V_m}{d}\omega\cos\omega t$$

$$B_m(r) = B_m(R)\frac{r}{R} = (1.88)\frac{r}{(30)} = 0.063r(PT)$$

كه در آن r برحسب ميليمتر می‌باشد.



۱۲●●- يک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دايره‌ای به شعاع $40\ \text{mm}$ با جريان $6.0\ \text{A}$ در حال تخليه است. در چه شعاعی (الف) داخل و (ب) خارج از فاصلهٔ خازن بزرگی ميدان مغناطيسی القا شده برابر ٪۷۵ مقدار بيشينهٔ خود است؟ (پ) اين مقدار بيشينه چقدر است؟

حل: **(الف)** از مسئله نمونه ۲۸-۱ برای $r < R$ داريم:

$$B = \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 r\frac{dE}{dt}$$

بيشينه ميدان مغناطيسی در جايی است كه $r=R$ باشد.

$$B_m = \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 R\frac{dE}{dt}$$

$$B = 0.75B_m \Rightarrow \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 r\frac{dE}{dt} = (0.75)\frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 R\frac{dE}{dt}$$

$$r = 0.75R = (0.75)(40) = 30\ \text{mm}$$

(ب) برای $r > R$ داريم:

$$B = \frac{\mu_0\varepsilon_0 R^2}{2r}\frac{dE}{dt}$$

$$\frac{\mu_0\varepsilon_0 R^2}{2r}\frac{dE}{dt} = (0.75)\frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 R\frac{dE}{dt}$$

$$\frac{R}{r} = 0.75 \Rightarrow r = \frac{R}{0.75} = \frac{40}{0.75} = 53.3\ \text{mm}$$

(پ) در مورد جريان تخليه داريم:

$$i_d = \varepsilon_0 A\frac{dE}{dt} = (8.85\times10^{-12})(3.14)(40\times10^{-3})^2\frac{dE}{dt}$$

$$6 = 4.45\times10^{-14}\frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = 1.35\times10^{14}\ \text{V/m}\cdot\text{s}$$

$$B_m = \left(\frac{1}{2}\right)(4\pi\times10^{-7})(8.85\times10^{-12})(40\times10)\times$$

$$(1.35\times10^{14}) = 3\times10^{-5}\ \text{T}$$

بخش ۲۸-۴ جريان جابه‌جايی

۱۳●- اختلاف پتانسيل بين صفحه‌های يک خازن صفحه- موازی با ظرفيت $2.0\ \mu\text{F}$ با چه آهنگی بايد تغيير كند تا جريان جابه‌جايی $1.5\ \text{A}$ ايجاد شود؟

حل:

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{1}{d}\frac{dV}{dt}$$

از رابطه (۲۸-۱۰) داريم:

$$i_d = \varepsilon_0 A\frac{dE}{dt} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{dV}{dt} = C\frac{dV}{dt}$$

$$1.5 = (2\times10^{-6})\frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 7.5\times10^{5}\ \text{V/s}$$

۱۴●- يک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دايره‌ای به شعاع R باردار شده است. نشان دهيد كه بزرگی چگالی جريان جابه‌جايی به ازای $r \leq R$ برابر $J_d = \varepsilon_0(dE/dt)$ است.

حل:

$$i_d = \varepsilon_0 A\frac{dE}{dt}$$

$$j_d = \frac{i_d}{A} = \varepsilon_0\frac{dE}{dt}$$

۱۵●- SSM ثابت كنيد كه جريان جابه‌جايی در يک خازن صفحه موازی با ظرفيت C را می‌توان به صورت $i_d = C(dV/dt)$ نوشت، كه در آن V اختلاف پتانسيل بين صفحه‌هاست.

حل: از معادله ۲۸-۱۰ داريم:

$$i_d = \varepsilon_0 A\frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 A\frac{d}{dt}\left(\frac{V}{d}\right) = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{dV}{dt} = C\frac{dV}{dt}$$

۱۶●- يک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دايره‌ای به شعاع $0.10\ \text{m}$ باردار می‌شود. يک حلقهٔ دايره‌ای به شعاع $0.20\ \text{m}$ با خازن هم محور است و در وسط صفحه‌ها قرار دارد. جريان جابه‌جايی در حلقه $2.0\ \text{A}$ است. ميدان الكتريكی بين صفحه‌ها با چه آهنگی تغيير می‌كند؟

حل: از رابطه ۲۸-۱۰ داريم:

$$i_d = \varepsilon_0 A\frac{d\Phi}{dt} = \varepsilon_0\pi R^2\frac{dE}{dt}$$

$$2 = (8.85\times10^{-12})(3.14)(0.1)^2\frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = 7.2\times10^{12}\ \text{V/m}\cdot\text{s}$$

۱۷- يک سيم نقره‌ای دارای مقاومت ويژهٔ $\rho = 1.62\times10^{-8}\ \Omega\text{m}$ و مساحت سطح مقطع $5.00\ \text{mm}^2$ است. جريان در سيم يكنواخت و وقتی $100\ \text{A}$ است با آهنگ $2000\ \text{A/s}$ تغيير می‌كند. (الف) وقتی جريان در سيم $100\ \text{A}$ است، بزرگی ميدان الكتريكی (يكنواخت) در سيم چقدر است؟ (ب) در اين زمان بزرگی جريان جابه‌جايی در سيم چقدر است؟ (پ) در فاصلهٔ r از سيم نسبت بزرگی ميدان مغناطيسی ناشی از جريان جابه‌جايی به بزرگی ميدان مغناطيسی ناشی از جريان چقدر است؟

حل: **(الف)** با استفاده از معادله ۲۲-۱۰ برای ميدان الكتريكی سيم داريم

$$E = \rho J = \rho\frac{i}{A} = (1.62\times10^{-8})\frac{100A}{5.00\times10^{-6}}$$

$$= 0.324\ \text{V/m}$$

(ب) جريان جابه‌جايی چنين می‌شود

$$i_d = \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 A\frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 A\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho i}{A}\right) = \varepsilon_0\rho\frac{di}{dt}$$

$$= (8.85\times10^{-12})(1.62\times10^{-8})(2000)$$

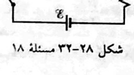
$$= 2.87\times10^{-16}\ \text{A}$$

(پ) نسبت ميدان‌ها برابر است با

$$\frac{B(\text{ناشی از } i_d)}{B(\text{ناشی از } i)} = \frac{\mu_0 i_d/2\pi r}{\mu_0 i_d/2\pi r} = \frac{i_d}{i} = \frac{2.87\times10^{-16}}{100}$$

$$= 2.87\times10^{-18}$$

۱۸●●- مدار شكل ۲۸-۳۰ شامل كليد S، باتری آرمانی $12.0\ \text{V}$، مقاومت $20.0\ \text{M}\Omega$ و خازنی پر شده از هواست. خازن دارای صفحه‌های دايره‌ای موازی به شعاع $5.00\ \text{cm}$ است كه به فاصلهٔ $3.00\ \text{mm}$ از هم قراردارند. در زمان $t=0$، كليد S بسته شده و خازن شروع به پر شدن می‌كند. ميدان الكتريكی ميان صفحه‌ها يكنواخت است. در $t = 250\ \mu\text{s}$، بزرگی ميدان مغناطيسی در خازن و به فاصلهٔ شعاعی $3.00\ \text{cm}$ چقدر است؟



شكل ۲۸-۳۲ مسئلهٔ ۱۸

حل:

$$C=\varepsilon_0\frac{A}{d}=(8/85\times10^{-12})\frac{\pi(5\times10^{-2})^2}{(3\times10^{-3})}=2/32\times10^{-11}\ \mathrm{F}$$

$$\tau=RC=(20\times10^{6})(2/32\times10^{-11})=4/64\times10^{-4}\ \mathrm{S}$$

میدان در بین صفحات خازن یکنواخت بوده و برابر است با:

$$E=\frac{V}{d}=\frac{12e^{\frac{-t}{\tau}}}{3\times10^{-3}}=400e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$\oint\vec{B}\cdot\vec{ds}=\varepsilon_0\mu_0\frac{d\Phi_E}{dt}=\varepsilon_0\mu_0A\frac{dE}{dt}$$

$$B2\pi r=\varepsilon_0\mu_0\pi r^2\frac{dE}{dt}\Rightarrow B=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mu_0\pi r\frac{dE}{dt}$$

$$B=\frac{1}{2}(8/85\times10^{-12})(4\pi\times10^{-7})(3\times10^{-2})\left(\frac{4000}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$B=1/44\times10^{-12}\,e^{\frac{-250\times10^{-6}}{4/64\times10^{-4}}}=8/41\times10^{-13}\ \mathrm{T}$$

۱۹●●- *چگالی جریان جابه‌جایی یکنواخت.* شکل ۲۸-۲۹ ناحیه‌ای دایره‌ای به شعاع $R=3/00\mathrm{cm}$ را نشان می‌دهد که در آن جریان جابه‌جایی به سمت خارج صفحهٔ کاغذ است. جریان جابه‌جایی دارای چگالی یکنواخت به بزرگی $J_d=6/00\mathrm{A/m^2}$ است. بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از جریان جابه‌جایی در فاصلهٔ شعاعی (الف) ۲/۰۰cm و (ب) ۵/۰۰cm چقدر است؟

حل: برای $r<R$ داریم:

$$\oint\vec{B}_d\cdot\vec{ds}=\mu_0i_d=\mu_0j_d\,A$$

$$2\pi rB_d=\mu_0j_d\pi r^2\Rightarrow B_d=\frac{\mu_0j_dr}{2}$$

$$B_d=\left(\frac{1}{2}\right)(4\pi\times10^{-7})(6)(2\times10^{-2})=7/54\times10^{-8}\ \mathrm{T}$$

(ب) برای $r>R$ داریم:

$$\oint\vec{B}_d\cdot\vec{ds}=\mu_0i_d=\mu_0i_dA$$

$$2\pi B_d=\mu_0i_d\pi R^2\Rightarrow B_d=\frac{\mu_0i_dR^2}{2r}$$

$$B_d=\frac{(4\pi\times10^{-7})(6)(3\times10^{-2})^2}{(2)(5\times10^{-2})}=6/79\times10^{-8}\ \mathrm{T}$$

۲۰●●- *جریان جابه‌جایی یکنواخت.* شکل ۲۸-۲۹ ناحیه‌ای دایره‌ای به شعاع $R=3/00\mathrm{cm}$ را نشان می‌دهد که در آن جریان جابه‌جایی یکنواخت $i_d=0/500\mathrm{A}$ به طرف خارج صفحهٔ کاغذ است. بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از جریان جابه‌جایی در فاصلهٔ شعاعی (الف) ۲/۰۰cm و (ب) ۵/۰۰cm چقدر است؟

حل: (الف) برای $r<R$ داریم:

$$\oint\vec{B}_d\cdot\vec{ds}=\mu_0i_d$$

$$\oint B_d2\pi r=\mu_0i'_d\Rightarrow B=\frac{\mu_0i'_d}{2\pi r}$$

$$\frac{i'_d}{\pi r^2}=\frac{i_d}{\pi R^2}\Rightarrow i'_d=\frac{i_d}{R^2}r^2$$

$$B_d=\frac{\mu_0i_dr}{2\pi R^2}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(0/5)(2\times10^{-2})}{(2\pi)(3\times10^{-2})^2}$$

$$=2/22\times10^{-6}\ \mathrm{T}$$

(ب) برای $r>R$ داریم:

$$i'_d=i_d$$

$$B_d=\frac{\mu_0i_d}{2\pi r}=\frac{(4\pi\times10^{-7})(0/5)}{(2\pi)(5\times10^{-2})}=2\times10^{-6}\ \mathrm{T}$$

۲۱●●- GO *چگالی جریان جابه‌جایی غیر یکنواخت.* شکل ۲۸-۲۹ ناحیه‌ای دایره‌ای به شعاع $R=3/00\mathrm{cm}$ را نشان می‌دهد که در آن جریان جابه‌جایی به طرف خارج از صفحهٔ کاغذ برقرار است. بزرگی چگالی جریان جابه‌جایی با رابطهٔ $J_d=(4/00\mathrm{A/m^2})(1-r/R)$ داده می‌شود که r فاصلهٔ شعاعی $(r\leq R)$ است. بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از جریان جابه‌جایی در (الف) $r=2/00\mathrm{cm}$ و (ب) $r=5/00\mathrm{cm}$ چقدر است.

حل: (الف) برای $r\leq R$ داریم:

$$\vec{B}_d\cdot\vec{ds}=\mu_0i'_d$$

$$B_d2\pi r=\mu_0i'_d\Rightarrow B_d=\frac{\mu_0i'_d}{2\pi r}$$

که در آن i'_d جریان جابه‌جایی است که از درون حلقه آمپر C می‌گذرد.

$$i'_d=\int\vec{J}_d\cdot\vec{dA}=\int_{r=0}^{r}(4)\left(1-\frac{r}{R}\right)2\pi r\,dr$$

$$i'_d=(8\pi)\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{r^3}{3R}\right)=(8)(3/14)\times$$

$$\left[\frac{(2\times10^{-2})^2}{2}-\frac{(2\times10^{-2})^3}{(3)(3\times10^{-2})}\right]=2/79\times10^{-3}\ \mathrm{A}$$

$$B_d=\frac{(4\pi\times10^{-7})(2/79\times10^{-3})}{(2\pi)(2\times10^{-2})}=2/79\times10^{-8}\ \mathrm{T}$$

(ب) برای $r>R$ داریم:

$$i'_d=\int_{r=0}^{R}\vec{J}_d\cdot\vec{dA}=(8\pi)\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^3}{3R}\right)=\frac{8\pi R^2}{6}$$

$$i'_d=\frac{(8)(3/14)(3\times10^{-2})^2}{(6)}=3/77\times10^{-3}\ \mathrm{A}$$

$$B_d=\frac{(4\pi\times10^{-7})(3/77\times10^{-3})}{(2\pi)(5\times10^{-2})}=1/51\times10^{-8}\ \mathrm{T}$$

۲۲●●- GO *جریان جابه‌جایی غیر یکنواخت.* شکل ۲۸-۲۹ ناحیه‌ای دایره‌ای به شعاع $R=3/00\mathrm{cm}$ را نشان می‌دهد که در آن جریان i_d به طرف خارج صفحهٔ کاغذ برقرار است. بزرگی جریان جابه‌جایی با رابطهٔ $i_d=(3/00A)(r/R)$ داده می‌شود که r فاصلهٔ شعاعی $(r\leq R)$ است. بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از i_d در فاصلهٔ شعاعی (الف) ۲/۰۰cm و (ب) ۵/۰۰cm چقدر است؟

حل:

$$\oint\vec{B}_d\cdot\vec{ds}=\mu_0i'_d$$

$$B_d2\pi r=\mu_0i'_d\Rightarrow B_d=\frac{\mu_0i'_d}{2\pi r}$$

که i'_d جریان جابه‌جایی است که از درون حلقه آمپر می‌گذرد.

(الف) برای $r<R$ داریم:

$$i'_d=(3)\frac{r}{R}=(3)\frac{(2)}{(3)}=2\ \mathrm{A}$$

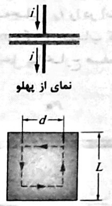
$$B=\frac{(4\pi\times10^{-7})(2)}{(2\pi)(2\times10^{-2})}=2\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$

(ب) برای $r>R$ داریم:

$$i_d=2\frac{R}{R}=3\mathrm{A}$$

$$B=\frac{(4\pi\times10^{-7})(3)}{(2\pi)(5\times10^{-2})}=1/3\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$

۲۳●●- ILW SSM یک خازن صفحه- موازی مطابق شکل ۲۸-۳۳ دارای صفحه‌های مربعی با ضلع $L=1/0\mathrm{cm}$ است. جریان ۲/۰ A که خازن را باردار می‌کند، یک میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ میان صفحه‌ها ایجاد می‌کند که برصفحه‌ها عمود است. (الف) جریان جابه‌جایی که از میان صفحه‌ها می‌گذرد چقدر است؟ (ب) dE/dt در این ناحیه چقدر است؟ (پ) جریان جابه‌جایی محصور که از مسیر مربع خط چین به ضلع $d=0/50\mathrm{m}$ میان صفحه‌ها می‌گذرد چقدر است؟ (ت) $\oint\vec{B}\cdot\vec{ds}$ دور این مسیر مربع خط‌چین چقدر است؟



نمای از پهلو

نمای از بالا

شکل ۲۸-۳۱ مسئله ۲۳

حل:

(الف) از پایستگی بار الکتریکی داریم:

$$i=i_d=2\mathrm{A}$$

(ب)

$$i_d=\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}=\varepsilon_0A\frac{dE}{dt}$$

$$2=(8/85\times10^{-12})(1)^2\frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt}=2/3\times10^{11}\ \mathrm{V/m\cdot s}$$

(پ)

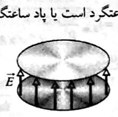
$$\frac{i'_d}{i_d\ \text{کل}}=\frac{d^2}{L^2}\Rightarrow\frac{i'_d}{2}=\frac{(0/5)^2}{(1)^2}\Rightarrow i'_d=0/5\mathrm{A}$$

(ت)

$$\oint\vec{B}\cdot\vec{ds}=\mu_0i'_d=(4\pi\times10^{-7})(0/5)=6/28\times10^{-7}$$

$$=0/63\times10^{-6}\ \mathrm{T\cdot m}$$

۲۴●●- بزرگی میدان الکتریکی بین دو صفحهٔ دایره‌ای موازی در شکل ۲۸-۳۲ برابر $E=(4/0\times10^5)-(6/0\times10^4\,t)$ است، که در آن E برحسب ولت برمتر و t برحسب ثانیه است. در $t=0$ ، $\vec{E}$ به طرف بالاست. مساحت صفحه $4/0\times10^{-2}\mathrm{m^2}$ است. به ازای $t\geq0$ ، مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت (بالا یا پایین) جریان جابه‌جایی بین صفحه‌ها. (پ) آیا جهت میدان مغناطیسی القا شده در شکل ساعتگرد است یا پاد ساعتگرد؟



شکل ۲۸-۳۲ مسئلهٔ ۲۴

حل: (الف) و (ب) چون میدان تابع فاصله نمی‌باشد می‌توان از رابطه (۲۸-۱۰) استفاده نمود.

$$i_d=\varepsilon_0A\frac{dE}{dt}=(8/85\times10^{-12})(4\times10^{-2})(-6\times10^{4})$$

$$=-2/12\times10^{-8}\ \mathrm{A}$$

۲۵●●- ILW وقتی یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای به قطر ۲۰ cm در حال پرشدن است، چگالی جریان جابه‌جایی در ناحیهٔ میان دو صفحه یکنواخت و دارای بزرگی ۲۰ A/m² است. (الف) بزرگی $\vec{B}$ میدان مغناطیسی را در فاصلهٔ $r=50\mathrm{mm}$ از محور تقارن این ناحیه به دست آورید. (ب) dE/dt را در این ناحیه حساب کنید.

حل:

$$\oint_c\vec{B}\cdot\vec{ds}=\mu_0i_d=\mu_0jA$$

$$B2\pi r=\mu_0j\pi r^2\Rightarrow B=\frac{\mu_0jr}{2}$$

$$B=\frac{1}{2}(4\pi\times10^{-7})(20)(50\times10^{-3})=6/3\times10^{-7}\ \mathrm{T}$$

(ب)

$$i_d=j_dA=\varepsilon_0A\frac{dE}{dt}\Rightarrow j_d=\varepsilon_0\frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt}=\frac{j_d}{\varepsilon_0}=\frac{(20)}{(8/85\times10^{-12})}=2/3\times10^{12}\ \mathrm{V/m\cdot s}$$

۲۶●●- یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای به شعاع ۱/۲۰cm با جریان ۱۲/۰ A تخلیه می‌شود. حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع $R/3$ را در نظر بگیرید که مرکز آن روی محور مرکزی میان صفحه‌ها قرار داد. (الف) در حلقه محصور شده جریان جابه‌جایی چقدر است؟ میدان مغناطیسی القا شدهٔ بیشینه

دارای بزرگی ۱۲/۰ mT است. در چه شعاعی (ب) داخل و (پ) خارج از فاصلهٔ خازن بزرگی میدان مغناطیسی القا شده برابر ۳/۰۰ mT است؟

حل:

$$r=\frac{R}{۳}<R$$

(الف)

$$\frac{i_d}{i_{d,m}}=\frac{\pi r^۲}{\pi R^۲}\Rightarrow\frac{i_d}{۱۲}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ \text{ کل}$$

$$i_d=۱/۳۳\,A$$

(ب)

$$\oint\vec{B}\cdot\vec{ds}=\mu_۰ i_d\Rightarrow B۲\pi r=\mu_۰ i_d$$

$$B=\frac{\mu_۰ i_d}{۲\pi r}$$

$$\frac{i_d}{i_{d,m}}=\frac{\pi r^۲}{\pi R^۲}\Rightarrow i_d=i_{d,m}\frac{r^۲}{R^۲}$$

$$B=\frac{\mu_۰ i_{d,m}}{۲\pi r}\frac{r^۲}{R^۲}=\frac{\mu_۰ i_{d,m}r}{۲\pi R^۲}$$

$$B_m=\frac{\mu_۰ i_{d,m}}{۲\pi R}$$

$$\frac{B}{B_m}=\frac{r}{R}$$

$$\frac{۳}{۱۲}=\frac{r}{۱/۲}\Rightarrow r=۰/۳\,cm$$

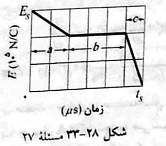
(پ)

$$\oint\vec{B}\cdot\vec{ds}=\mu_۰ i_{d,m}$$

$$B۲\pi r=\mu_۰ i_{d,m}\Rightarrow B=\frac{\mu_۰ i_{d,m}}{۲\pi r}$$

$$\frac{B}{B_m}=\frac{R}{r}\Rightarrow\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱/۲}{r}\Rightarrow r=۴/۸\,cm$$

••۲۷- WWW SSM در شکل ۲۸-۳۳ میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ کاهش می‌یابد. مقیاس محور قائم با $E_s=۶/۰\times۱۰^۵$ N/C و مقیاس محور افقی با $t_s=۱۲/۰\,\mu s$ مشخص شده است. بزرگی جریان جابه‌جایی را که از سطحی با مساحت $۱/۶\,m^۲$ عمود بر میدان، در طی بازه‌های زمانی a، b و c نشان داده شده روی نمودار می‌گذرد حساب کنید. (از رفتار میدان در انتهای هر بازه چشم‌پوشی کنید.)



شکل ۲۸-۳۳ مسئلهٔ ۲۷

حل:

(الف)

$$i_d=\varepsilon_۰ A\frac{dE}{dt}$$

در ناحیه $۰\le t\le ۴\mu_s$

$$\frac{dE}{dt}=\frac{(۴-۶)\times۱۰^۵}{(۴-۰)\times۱۰^{-۶}}=-۵\times۱۰^{۱۰}\ V/m\cdot s$$

$$i_d=(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۱/۶)(-۵\times۱۰^{۱۰})=۰/۷۱A$$

(ب) در ناحیه $۴\le t\le ۱۰\mu_s$

$$\frac{dE}{dt}=۰$$

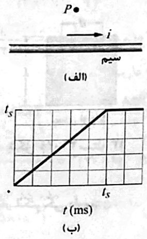
$$i_d=۰$$

(پ) در ناحیه $۱۰\,\mu s\le t\le ۱۲\mu s$

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{(۰-۴)\times۱۰^۵}{(۱۲-۱۰)\times۱۰^{-۶}}=-۲\times۱۰^{۱۱}\ V/m\cdot s$$

$$i_d=(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۱/۶)(-۲\times۱۰^{۱۱})=-۲/۸۳\,A$$

••۲۸- GO شکل ۲۸-۳۴ الف جریان i ایجاد شده در سیمی با مقاومت ویژهٔ $۱/۶۲\times۱۰^{-۸}\,\Omega m$ را نشان می‌دهد. بزرگی جریان برحسب زمان t در شکل ۲۸-۳۴ ب نشان داده شده است. مقیاس محور قائم با $i_s=۱۰/۰\,A$ و مقیاس محور افقی با $t_s=۵۰/۰\,ms$ مشخص شده است. نقطهٔ P در فاصلهٔ شعاعی ۹/۰۰ mm از مرکز سیم واقع است. بزرگی میدان مغناطیسی $\vec{B}_i$ ناشی از جریان واقعی i را در (الف) $t=۲۰\,ms$، (ب) $t=۴۰\,ms$ و (پ) $t=۶۰\,ms$ حساب کنید. حال، فرض کنید که میدان الکتریکی که جریان را به حرکت می‌اندازد محدود به داخل سیم باشد. در این صورت، بزرگی میدان مغناطیسی B_{id} ناشی از جریان جابه‌جایی i_d را در (ت) $t=۲۰\,ms$، (ث) $t=۴۰\,ms$ و (ج) $t=۶۰\,ms$ حساب کنید. در نقطهٔ P در $t=۲۰\,s$ جهت (به داخل یا خارج صفحهٔ کاغذ) (چ) $\vec{B}_i$ و (ح) $\vec{B}_{id}$ چیست؟



شکل ۲۸-۳۴ مسئلهٔ ۲۸

حل:

(الف)

$$B_i=\frac{\mu_۰ i}{۲\pi r}$$

$$t=۲۰\,ms\Rightarrow i=۴\,A$$

$$B=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۴)}{(۲\pi)(۹\times۱۰^{-۳})}=۸/۹\times۱۰^{-۵}\ T$$

(ب)

$$t=۴۰\,ms\Rightarrow i=۸\,A$$

$$B_i=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸)}{(۲\pi)(۹\times۱۰^{-۳})}=۱۷/۸\times۱۰^{-۵}\ T$$

(پ)

$$t=۶۰\,ms\Rightarrow i=۱۰\,A$$

$$B_i=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱۰)}{(۲\pi)(۹\times۱۰^{-۳})}=۲۲/۲۵\times۱۰^{-۵}\ T$$

(ت)

از معادله (۲۲-۱۰) داریم:

$$E=\rho j=\rho\frac{i}{A}$$

$$\oint\vec{B}_i\cdot\vec{ds}=\varepsilon_۰\mu_۰\frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$B_i۲\pi r=\varepsilon_۰\mu_۰ A\frac{dE}{dt}=\varepsilon_۰\mu_۰ A\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{i}{A}\right)=\varepsilon_۰\mu_۰\rho\frac{di}{dt}$$

$$B_i=\frac{\varepsilon_۰\mu_۰\rho}{۲\pi r}\frac{di}{dt}$$

$$B_i=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱/۶۲\times۱۰^{-۸})}{(۲\pi)(۹\times۱۰^{-۳})}\frac{di}{dt}$$

$$=۳/۱۸۶\times۱۰^{-۲۲}\frac{di}{dt}$$

$$t=۲۰\ ms$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{۱۰-۰}{۵۰\times۱۰^{-۳}}=۲۰۰\,A/S$$

$$B_{id}=(۳/۱۸۶\times۱۰^{-۲۲})(۲۰۰)=۶/۳۷\times۱۰^{-۲۲}\ T$$

(ث) $t=۴۰\,ms$

$$\frac{di}{dt}=۲۰۰\,A/s$$

$$B_{id}=۶/۳۷\times۱۰^{-۲۳}\ T$$

(ج) $t=۶۰\ ms$

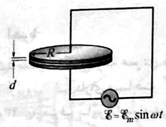
$$\frac{di}{dt}=۰$$

$$B_{id}=۰$$

(چ) جهت B_i با استفاده از قاعده دست راست، به طرف بیرون صفحه است.

(ح) چون $\frac{di}{dt}$ مثبت است، جهت B_{id} در جهت B_i و برون‌سو می‌باشد.

۲۹- در شکل ۲۸-۳۵، یک خازن با صفحه‌های دایره‌ای به شعاع $R=۱۸/۰\,cm$ به منبع نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}=\mathscr{E}_m\sin\omega t$ متصل است که در آن $\mathscr{E}_m=۲۲۰\,V$ و $\omega=۱۳۰\,rad/s$. مقدار بیشینهٔ جریان جابه‌جایی $i_d=۷/۶۰\,\mu A$ است. از اثر میدان الکتریکی در لبهٔ صفحه‌ها چشم‌پوشی کنید. (الف) مقدار بیشینهٔ جریان i در مدار چقدر است؟ (ب) مقدار بیشینهٔ $d\Phi_E/dt$ چقدر است، که در آن Φ_E شار الکتریکی است که از ناحیهٔ میان صفحه‌ها می‌گذرد؟ (پ) فاصلهٔ d میان صفحه‌ها چقدر است؟ (ت) مقدار بیشینهٔ بزرگی $\vec{B}$ میان صفحه‌ها در فاصلهٔ $r=۱۱/۰\,mm$ از مرکز چقدر است؟



شکل ۲۸-۳۵ مسئلهٔ ۲۹

حل: (الف) در هر لحظه، جریان جابه‌جایی i_d در فضای میان صفحه‌ها برابر با جریان رسانش I در سیم‌هاست. بنابراین $i_{max}=i_{d,max}=۷/۶۰\,\mu A$ می‌شود.

(ب) چون $i_d=\varepsilon_۰(d\Phi_E/dt)$ است، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{d\Phi_E}{dt}\right)_{max}=\frac{i_{d,max}}{\varepsilon_۰}=\frac{۷/۶۰\times۱۰^{-۶}}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}}$$

$$=۸/۵۹\times۱۰^۵\ V\cdot m/s$$

(پ) از مسئله ۱۳ داریم

$$i_d=C\frac{dV}{dt}=\frac{\varepsilon_۰ A}{d}\frac{dV}{dt}$$

اکنون اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر با emf مولد است و بنابراین $V=\varepsilon_m\sin\omega t$ و از آنجا $dV/dt=\omega\varepsilon_m\cos\omega t$ می‌شود. بنابراین برای i_d خواهیم داشت:

$$i_d=\frac{\varepsilon_۰ A\omega\varepsilon_m}{d}=\cos\omega t$$

و از آنجا $i_{d,max}=\varepsilon_۰ A\omega\varepsilon_m/d$ می‌شود. در نتیجه، فاصله d میان صفحه‌ها چنین می‌شود:

$$d=\frac{\varepsilon_۰ A\omega\varepsilon_m}{i_{d,max}}$$

$$=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})\pi(۰/۱۸۰)^۲(۱۳۰)(۲۲۰)}{۷/۶۰\times۱۰^{-۶}}$$

$$=۳/۳۹\times۱۰^{-۳}\ m$$

که در آن از $A=\pi R^۲$ استفاده شد.

(ت) قانون آمپر - ماکسول را در امتداد مسیری دایره‌ای به شعاع r میان صفحه‌ها و به موازات آنها محاسبه می‌کنیم. اگر i_d را جریان جابه‌جایی کل و $i_{d,max}$ را جریان جابه‌جایی عبوری از سطح موردنظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\oint\vec{B}_d\cdot\vec{ds}=\mu_۰ i_{d,enc}\ ,\ i_d=\int j_d\,dA=\frac{i_d}{\pi R^۲}\pi r^۲$$

و در نتیجه

$$B_d(۲\pi r)=\mu_۰\left(\frac{r^۲}{R^۲}\right)i_d\Rightarrow B_d=\frac{\mu_۰ i_d r}{۲\pi R^۲}$$

و از آنجا B_{max} چنین می‌شود.

$$B_{max}=\frac{\mu_۰ i_{d,max}r}{۲\pi R^۲}$$

$$=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۷/۶\times۱۰^{-۶})(۰/۱۱۰)}{۲\pi(۰/۱۸۰)^۲}$$

$$=۵/۱۶\times۱۰^{-۱۲}\ T$$

بخش ۲۸-۶ آهنربا

•۳۰- فرض کنید مقدار میانگین مؤلفهٔ عمودی میدان مغناطیسی زمین در همهٔ آریزونا[1] که دارای مساحت $۲/۹۵\times ۱۰^{۵}\ km^{۲}$ است برابر $۴۳\mu T$ (به طرف پایین) است. در این صورت، (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا طرف خارج) شار خالص عبوری از بقیهٔ سطح زمین (جدا از سطح آریزونا) چقدر است؟

حل: (الف) و (ب) اگر شار گذرنده از این سطح را $\Phi_۱$ و شار گذرنده از بقیه سطح زمین را $\Phi_۲$ بنامیم در این صورت:

$$\Phi_۱+\Phi_۲=۰$$

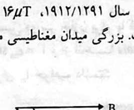
$$\Phi_۲=-\Phi_۱=-BA=-(-۴۳/۶\times ۱۰^{-۶})(۲/۹۵\times ۱۰^{۵}\times ۱۰^{۶})$$

$$=۱/۲۹\times ۱۰^{۷}\ T\cdot m^{۲}$$

چون علامت آن مثبت است، شار به طرف خارج سطح است.

•۳۱- SSM در نیوهمشایر[2] میانگین مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی زمین در سال ۱۹۱۲/۱۲۹۱، $۱۶\mu T$ و میانگین زاویهٔ میل ۷۳° بوده است. بزرگی میدان مغناطیسی مربوط به زمین چقدر بوده است؟

حل:

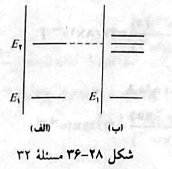


$$B_۱=B\cos\theta \Rightarrow B=\frac{B_۱}{\cos\theta}$$

$$B=\frac{(۱۶)}{(\cos ۷۳)}=۵۴/۷\mu T$$

بخش ۲۸-۶ مغناطیس و الکترون‌ها

•۳۲- شکل ۲۸-۳۶ الف یک نمودار تک محوری است که در امتداد آن دو مقدار مجاز (*ترازهای*) یک اتم رسم شده‌اند. وقتی اتم در یک میدان مغناطیسی $۰/۵۰۰T$ قرار گیرد، نمودار به علت انرژی مربوط به $\vec{\mu}_{orb}.\vec{B}$ (از $\vec{\mu}_s$ چشمپوشی می‌کنیم) به نمودار شکل ۲۸-۳۶ ب تغییر می‌کند. تراز $E_۱$ تغییر نکرده است اما تراز $E_۲$ به ترازهای سه گانه (خیلی نزدیک به هم) شکافته شده است. مقدارهای مجاز m_l مربوط به (الف) تراز انرژی $E_۱$ و(ب) تراز انرژی $E_۲$، چقدرند؟ (پ) برحسب J، مقدار انرژی مربوط به جدایی میان ترازهای سه گانه چقدر است؟



شکل ۲۸-۳۶ مسئلهٔ ۳۲

حل:
$$\mu=-m_L\frac{eh}{۴\pi m}$$

(الف) تراز انرژی $E_۱$ تغییری نکرده است و $m_L=۰$ می‌باشد پس:

$$m_L=۰$$

(ب) $E_۲$ به سه خط تبدیل شده است.

$$m_L=-۱,۰,۱$$

(پ)
$$U=\vec{\mu}_L.\vec{B}=-m_L\frac{eh}{۴\pi m}B$$

$$\Delta U=\frac{eh}{۴\pi m}B=\frac{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۶/۶۳\times ۱۰^{۳۴})(۰/۵)}{(۴)(۳/۱۴)(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱})}$$

$$=۴/۶۳\times ۱۰^{-۲۴}\ J$$

•۳۳- SSM WWW اگر الکترونی در یک اتم دارای اندازه حرکت زاویه‌ای مداری $m_l=۰$ باشد، مؤلفه‌های (الف) $L_{orb,z}$ و (ب) $\mu_{orb,z}$ چقدرند؟ اگر اتم در میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ که دارای بزرگی $۳۵mT$ و در امتداد محور z است قرار گیرد، (پ) انرژی پتانسیل U_{orb} مربوط به $\vec{\mu}_{orb,z}$ و (ت) انرژی پتانسیل U_{spin} مربوط به $\vec{\mu}_s$ چقدرند؟ حال اگر، الکترون دارای $m_l=-۳$ باشد (ث) $L_{orb,z}$، (ج) $\mu_{orb,z}$، (چ) U_{orb} و (ح) U_{spin} چقدرند؟

حل:
$$L_{o,z}=m_L\frac{h}{۲\pi}$$

(الف) $M_L=۰\Rightarrow L_{o,z}=۰$

(ب) $\mu_{o,z}=-m_L\frac{eh}{۴\pi m}=-\frac{e}{۲m}L_{o,z}=۰$

(پ) $U=-\vec{\mu}_s\cdot\vec{B}=۰$

(ت)
$$U=-\vec{\mu}_s\cdot\vec{B}=-(\pm ۹/۲۷\times ۱۰^{-۲۴})(۳۵\times ۱۰^{-۳})$$
$$=\mp ۳/۲۴\times ۱۰^{-۲۵}\ J$$

(ث)
$$L_{o,z}=(-۳)\frac{(۶/۶۳\times ۱۰^{-۳۴})}{(۲)(۳/۱۴)}=-۳/۱۷\times ۱۰^{-۳۴}\ J\cdot s$$

(ج)
$$\mu_{o,z}=-\frac{e}{۲m}L_{o,z}=-\frac{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})}{(۲)(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱})}(-۳/۱۷\times ۱۰^{-۳۴})$$
$$=۲/۷۸\times ۱۰^{-۲۳}\ J/T$$

(چ)
$$U_۰=-\vec{\mu}_o\cdot\vec{B}=-(۲/۸۷\times ۱۰^{-۲۲})(۳۵\times ۱۰^{-۳})$$
$$=-۹/۷۳\times ۱۰^{-۲۵}\ J$$

(ح)
$$U=-\vec{\mu}_s\cdot\vec{B}=-(\pm ۹/۲۷\times ۱۰^{-۲۴})(۳۵\times ۱۰^{-۳})$$
$$=\pm ۳/۲۴\times ۱۰^{-۲۵}\ J$$

1. Arizona
2. New Hamshire

•۳۴- اختلاف انرژی میان هم‌ردیفی موازی و پادموازی مؤلفهٔ z گشتاور دو قطبی مغناطیسی اسپینی الکترون‌ها با میدان مغناطیسی خارجی $۰/۲۵T$ در جهت موازی با محور z، چقدر است؟

حل:
$$\vec{U}=-\vec{\mu}_s\cdot\vec{B}_e$$

از طرفی داریم:

$$\mu_s=۹/۲۷\times ۱۰^{-۲۴}\ J/T$$
$$U_۱=-(۹/۲۷\times ۱۰^{-۲۴})(۰/۲۵)\cos ۰=-۲/۳۲\times ۱۰^{-۲۴}\ J$$
$$U_۲=-(۹/۲۷\times ۱۰^{-۲۴})(۰/۲۵)\cos\pi=۲/۳۲\times ۱۰^{-۲۴}\ J$$
$$\Delta U=U_۲-U_۱=۴/۶۴\times ۱۰^{-۲۴}\ J$$

•۳۵- SSM مؤلفهٔ اندازه‌گیری شدهٔ گشتاور دو قطبی مغناطیسی مداری الکترون با (الف) $m_l=۱$ و (ب) $m_l=-۲$، چقدر است؟

حل: از رابطه (۲۸-۳۱) داریم:

$$\mu_{orb,z}=-m_l\frac{eh}{۴\pi m}$$

(الف)
$$M_{o,z}=-(۱)\frac{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۶/۶۳\times ۱۰^{-۳۴})}{(۴)(۳/۱۴)(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱})}$$
$$=-۹/۳\times ۱۰^{-۲۴}\ J/T$$

(ب)
$$M_{o,z}=-(۲)\frac{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۶/۶۳\times ۱۰^{-۳۴})}{(۴)(۳/۱۴)(۹/۱۱\times ۱۰^{-۳۱})}$$
$$=-۱/۸۶\times ۱۰^{-۲۳}\ J/T$$

•۳۶- الکترونی در میدان مغناطیسی $\vec{B}$ که در امتداد محور z است قرار دارد. اختلاف انرژی میان سمتگیری موازی و پاد موازی مؤلفهٔ z گشتاور مغناطیسی اسپینی با $\vec{B}$ برابر $۶/۰۰\times ۱۰^{-۲۵}\ J$ است. بزرگی $\vec{B}$ چقدر است؟

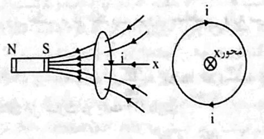
حل:
$$\Delta U=۲\mu_s B$$
$$۶\times ۱۰^{-۲۵}=(۲)(۹/۲۷\times ۱۰^{-۲۴})B$$
$$B=۳/۲۴\times ۱۰^{-۲}\ T$$

بخش ۲۸-۹ دیامغناطیس

•۳۷- شکل ۲۸-۳۷ یک مدل حلقه‌ای (حلقهٔ L) را برای ماده‌ای دیا مغناطیسی نشان می‌دهد. (الف) خط‌های میدان مغناطیسی را که براثر آهنربای میله‌ای از ماده و اطراف آن می‌گذرد رسم کنید. (ب) جهت گشتاور دو قطبی مغناطیسی خالص $\vec{\mu}$ چیست؟ (پ) جریان قراردادی i در حلقه در چه جهتی است (ساعتگرد یا پادساعتگرد در شکل)؟ (ت) نیروی مغناطیسی وارد بر حلقه در چه جهتی است؟

شکل ۲۸-۳۷ مسئلهٔ ۳۷ و ۷۱

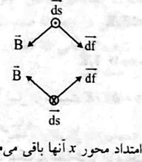
حل: (الف)



(ب) با توجه به جهت میدان هم‌گرا در شکل، جهت $\mu_۰$ (مداری) در جهت محور x (خلاف جهت $\vec{B}$) است.

(پ) جهت جریان در حلقه طوری است که μ_o را به وجود آورد. بنابراین اگر طوری به حلقه نگاه کنیم که محور xها عمود بر حلقه، به سمت داخل (درون‌سو) باشد، جهت جریان ساعتگرد می‌شود.

(د) اگر دو عنصر از حلقه را که نسبت به مرکز حلقه قرینه هستند در نظر بگیریم، عنصر نیرو که به این عناصر وارد می‌شود، (مطابق شکل) جهت عمودی یکدیگر را خنثی می‌کنند.



فقط مؤلفه در امتداد محور x آنها باقی می‌ماند. بنابراین نیرو در جهت محور x می‌باشد.

•••۳۸- فرضی کنید که الکترونی به جرم m و بزرگی بار e در مداری دایره‌ای به شعاع r به دور هسته می‌چرخد. سپس میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ عمود بر صفحهٔ مدار برقرار می‌شود. همچنین با فرض اینکه شعاع مدار تغییر نمی‌کند و اینکه تغییر تندی الکترون براثر میدان $\vec{B}$ ناچیز است، عبارتی را برای تغییر در گشتاور دو قطبی مغناطیسی مداری الکترون ناشی از میدان به دست آورید.

حل: قبل از اعمال میدان یکنواخت خارجی، گشتاور مغناطیسی حلقه برابر است با:

$$\mu=iA=\frac{e}{T}\pi r^{۲}$$

که r شعاع دوران الکترون و T دوره حرکت آن است.

$$T=\frac{۲\pi r}{V}$$

$$\mu=\frac{e\pi r^{۲}}{\frac{۲\pi r}{V}}=\frac{۱}{۲}erV$$

$$\Delta\mu=\frac{۱}{۲}er\Delta V \qquad (۱)$$

با اعمال میدان B نیرویی به طرف مرکز دوران به الکترون وارد می‌شود.

$$F = m\frac{V^۲}{r} \Rightarrow \Delta F = \frac{m}{r}۲V\Delta V$$

تغییر نیروی جانب مرکز الکترون، نیروی مغناطیسی وارد بر آن است.

$$evB = \frac{۲m}{r}V\Delta V \Rightarrow \Delta V = \frac{eBr}{۲m}$$

با قرار دادن این عبارت در رابطه (۱) داریم:

$$\Delta\mu = \frac{۱}{۲}er\frac{eBr}{۲m} = \frac{e^۲Br^۲}{۴m}$$

بخش ۲۸-۱۰ پارامغناطیس

۳۹•- نمونه‌ای از یک نمک پارامغناطیسی با منحنی مغناطیدگی شکل ۲۸-۱۴، برای اینکه آیا از قانون کوری پیروی می‌کند یا خیر مورد آزمون قرار می‌گیرد. نمونه در میدان مغناطیسی یکنواخت ۰/۵۰T قرار داده می‌شود که در طول آزمایش ثابت می‌ماند. سپس مغناطیدگی M در محدودهٔ دمای ۱۰ تا ۳۰۰K اندازه‌گیری می‌شود. آیا قانون کوری در این شرایط برقرار است؟

حل:

$$\frac{B}{T_۱} = \frac{۰/۵}{۱۰} = ۰/۵\,\text{T/K}$$

$$\frac{B}{T_۲} = \frac{۰/۵}{۳۰۰} = ۰/۰۰۱۶\ \text{T/K}$$

با توجه به نمودار تا قبل از نسبت $\frac{B}{T} \cong ۰/۵T/K$ منحنی از قانون کوری پیروی می‌نماید.

۴۰•- نمونه‌ای از یک نمک پارامغناطیسی با منحنی مغناطیدگی شکل ۲۸-۱۴ در دمای اتاق (۳۰۰K) قرار دارد. در چه میدان مغناطیسی اعمال شده‌ای اشباع مغناطیسی نمونه (الف) ۵۰٪ و (ب) ۹۰٪ خواهد بود؟ (پ) آیا این میدان‌ها در آزمایشگاه قابل دسترسی‌اند؟

حل: (الف) با استفاده از نمودار، با توجه به

$$\frac{M}{M_{max}} = \frac{۵۰}{۱۰۰} = ۰/۵$$

نسبت $\frac{B}{T}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{B}{T} \cong ۰/۵\frac{T}{K}$$

$$B = ۰/۵\times ۳۰۰ = ۱۵۰\text{T}$$

(ب)

$$\frac{M}{M_{max}} = \frac{۹۰}{۱۰۰} = ۰/۹$$

$$\frac{B}{T} \cong ۲/۸\frac{T}{K} \Rightarrow \frac{B}{۳۰۰} = ۲/۸$$

$$B = ۸۴۰$$

(پ) این میدان‌ها بسیار بزرگ هستند. در آزمایشگاه‌های معمولی، معمولاً میدان مغناطیسی ۱ T قابل دسترسی است.

۴۱•- SSM WWW آهنربایی به شکل میله‌ای استوانه‌ای دارای طول ۵/۰۰cm و قطر ۱/۰۰cm است. آهنربا دارای مغناطیدگی یکنواخت $۵/۳۰\times ۱۰^۳$ A/m است. گشتاور دو قطبی مغناطیسی آن چقدر است؟

حل: از رابطه گشتاور دو قطبی داریم:

$$M = \frac{\mu}{V} = \frac{\mu}{\pi R^۲ l}$$

$$۵/۳۰\times ۱۰^۳ = \frac{\mu}{(۳/۱۴)(۰/۵\times ۱۰^۲)^۲(۵\times ۱۰^{-۲})}$$

$$\mu = ۲/۰۸\times ۱۰^{-۲}\ \text{J/T}$$

۴۲•- میدان مغناطیسی ۰/۵۰T به گازی پارامغناطیسی که اتم‌هایش دارای گشتاور دو قطبی مغناطیسی ذاتی $۱/۰\times ۱۰^{-۲۳}$J/T هستند اعمال می‌شود. در چه دمایی انرژی جنبشی میانگین انتقالی اتم‌های گاز با انرژی مورد نیاز برای وارونه کردن دو قطبی در این میدان مغناطیسی برابر است؟

حل: انرژی لازم برای عوض کردن جهت دو قطبی مغناطیسی برابر است با:

$$E = \Delta U = ۲\mu_B = (۲)(۱\times ۱۰^{-۲۳})(۰/۵۰) = ۱\times ۱۰^{-۲۳}\ \text{J}$$

۴۳••- الکترونی با انرژی جنبشی K_e در مسیری دایره‌ای که عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت در جهت مثبت محور z است حرکت می‌کند. حرکت الکترون فقط از نیروی ناشی از میدان تأثیر می‌پذیرد. (الف) نشان دهید که گشتاور دو قطبی مغناطیسی الکترون بر اثر حرکت مداری آن دارای بزرگی $\mu = K_e / B$ و جهت آن مخالف جهت $\vec{B}$ است. (ب) بزرگی و (پ) جهت گشتاور دو قطبی مغناطیسی یک یون مثبت با انرژی جنبشی k_i با شرایط یکسان چیست؟ (ت) یک گاز یونیده شامل $۵/۳\times ۱۰^{۲۱}$ الکترون بر مترمکعب و دارای همین تعداد یون است. فرض کنید انرژی جنبشی میانگین الکترون $۶/۲\times ۱۰^{-۲۱}$J و انرژی جنبشی میانگین یون $۷/۲\times ۱۰^{-۲۱}$ J باشد. مغناطیدگی گاز را وقتی در میدان مغناطیسی ۱/۲T قرار گیرد محاسبه کنید.

حل: (الف)

$$F_B = eVB = m\frac{V^۲}{R} \Rightarrow r = \frac{mv}{eB}$$

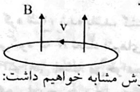
$$T = \frac{۲\pi r}{v}$$

از تعریف μ داریم:

$$\mu = iA = \frac{e}{T}\pi r^۲ = \frac{e}{\frac{۲\pi r}{V}}\cdot \pi r^۲ = \frac{۱}{۲}erv = \frac{۱}{۲}e\frac{mv}{eB}v$$

$$\mu = \frac{۱}{B}\frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{K_e}{B}$$

فرض می‌کنیم جهت میدان رو به بالا و جهت حرکت الکترون پادساعتگرد باشد. جهت جریان (خلاف جهت حرکت بار منفی) ساعتگرد می‌گردد و بنابراین جهت μ رو به پایین و خلاف B می‌باشد.



(ب) و (ج) با روش مشابه خواهیم داشت:

$$\mu = \frac{K_i}{B}$$

فقط جهت μ در جهت B است.

(د)

$$M = \frac{\mu_{کل}}{V} = \frac{۱}{V}(N_e\mu_e + N_i\mu_i)$$

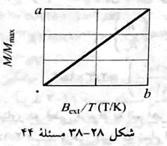
به فرض مسئله $n = n_e = n_i$ می‌باشد.

$$M = \frac{N}{V}(\mu_e + \mu_i) = \frac{N}{V}\left(\frac{ke}{B} + \frac{ki}{B}\right) = \frac{n}{B}(K_e + K_i)$$

$$M = \frac{(۵/۳\times ۱۰^{۲۱})}{(۱/۲)}(۶/۲\times ۱۰^{-۲۰} + ۷/۶\times ۱۰^{-۲۱})$$

$$= ۳۰۷\text{A/m}$$

۴۴•- شکل ۲۸-۳۸ منحنی مغناطیدگی را برای یک مادهٔ پارامغناطیسی به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $a = ۰/۱۵$ و مقیاس محور افقی با $b = ۰/۲$T/K مشخص شده است. فرض کنید μ_{sam} گشتاور مغناطیسی خالص اندازه‌گیری شده در مادهٔ نمونه و μ_{max} گشتاور مغناطیسی خالص بیشینهٔ ممکن در این نمونه باشد. بنابر قانون کوری وقتی نمونه در میدان مغناطیسی یکنواخت با بزرگی ۰/۸۰۰T قرار داده شود، در دمای ۲/۰۰K نسبت μ_{sam} / μ_{max} چه خواهد بود؟



شکل ۲۸-۳۸ مسئلهٔ ۴۴

حل:

$$\frac{B}{T} = \frac{۰/۸}{۲} = ۰/۴\ \text{T/K}$$

با توجه به نمودار اگر رابطه خطی محفوظ بماند در این صورت داریم:

$$\frac{M}{M_{max}} = ۰/۳۰$$

$$\frac{\mu}{\mu_{max}} = \frac{M}{M_{max}} = ۰/۳$$

۴۵- جسم صلبی را در نظر بگیرید که شامل N اتم در یکای حجم و هر اتم دارای گشتاور دو قطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ است. فرض کنید جهت $\vec{\mu}$ فقط می‌تواند موازی یا پاد موازی با میدان مغناطیسی اعمال شدهٔ خارجی $\vec{B}$ باشد (این حالتی خواهد بود که $\vec{\mu}$ ناشی از اسپین یک الکترون منفرد باشد). بنابر مکانیک آماری، احتمال اینکه یک اتم در حالتی با انرژی U باشد متناسب با $e^{-U/kT}$ است، که در آن T دما و k ثابت بولتزمن است. بنابراین، چون انرژی U برابر $-\vec{\mu}.\vec{B}$ است، کسر اتم‌هایی که گشتاور دو قطبی آنها موازی $\vec{B}$ باشد متناسب با $e^{\mu B/kT}$ و کسر اتم‌هایی که گشتاور دو قطبی آنها پادموازی با $\vec{B}$ باشد متناسب با $e^{-\mu B/kT}$ است. (الف) نشان دهید که مغناطش این جسم صلب برابر است با $M = N\mu\tanh(\mu B/kT)$. در اینجا tanh تابع تانژانت هذلولوی است: $\tanh(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$. (ب) نشان دهید که نتیجهٔ داده شده در (الف) به ازای $B \ll kT$ به $M = N\mu^۲B/kT$ تبدیل می‌شود. (پ) نشان دهید که نتیجهٔ داده شده در (الف) به‌ازای $B >> kT$ به $M = N\mu$ تبدیل می‌شود. (ت) نشان دهید که هر دو قسمت (ب) و (پ) به طور کیفی با شکل ۲۸-۱۴ سازگارند.

حل: (الف) از نماد $P(\mu)$ برای احتمال اینکه یک دو قطبی موازی میدان $\vec{B}$ باشد، و از نماد $P(-\mu)$ برای احتمال آنکه یک دو قطبی پادموازی این میدان باشد، استفاده می‌کنیم. مغناطیدگی را می‌توان به عنوان "میانگین وزنی" این احتمالات در نظر گرفت. زیرا مغناطیدگی در اینجا به صورت $M = (N_۱ - N_۲)\mu$ تعریف می‌شود. درصد اتم‌هایی که گشتاور دوقطبی آنها موازی میدان است برابر است با:

$$\frac{N_۱}{N} = \frac{P(\mu)}{P(\mu) + P(-\mu)}$$

و برای درصد اتم‌هایی که گشتاور دوقطبی آنها پادموازی میدان است داریم:

$$\frac{N_۲}{N} = \frac{P(-\mu)}{P(\mu) + P(-\mu)}$$

و از آنجا M چنین می‌شود

$$M = \frac{N\mu P(\mu) - N\mu P(-\mu)}{P(\mu) + P(-\mu)} = \frac{N\mu(e^{-\mu B/kT} - e^{-\mu B/kT})}{e^{-\mu B/kT} + e^{-\mu B/kT}}$$

$$= N\mu\tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$$

(ب) به ازای $\mu B \ll kT$ (که به معنی $\mu B/kT \ll ۱$ است) $e^{\pm\mu B/kT} \approx ۱ \pm \mu B/kT$ می‌شود و از آنجا برای M داریم:

$$M = N\mu\tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right) \approx \frac{N\mu[(۱ + \mu B/kT) - (۱ - \mu B/kT)]}{[(۱ + \mu B/kT) + (۱ - \mu B/kT)]}$$

$$= \frac{N\mu^۲ B}{kT}$$

(پ) به ازای $\mu B \gg kT$ ، $\tanh(\mu B/kT) \approx ۱$ می‌شود و از آنجا داریم:

$$M = N\mu\tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right) \approx N\mu$$

(ت) یک روش آن است که تابع $\tan h$ را رسم و با منحنی شکل ۲۸-۱۴ مقایسه کنیم. می‌توانیم به طور تحلیلی نیز این سازگاری را بررسی کنیم. توجه کنید N تعداد اتم‌ها در یکای حجم است و نتیجهٔ قسمت (پ) را می‌توان به صورت

$M_{max} = N\mu$ نوشت. پس M/M_{max} برای $\mu B \ll kT$ با استفاده از نتیجهٔ قسمت (ب) چنین می‌شود

$$\frac{M}{M_{max}} \approx \frac{\mu B}{kT} = C\frac{B}{T}$$

که این همان قانون کوری است که به ازای $B/T < ۰/۵۴$ T/K معتبر است و منطبق بر ابتدای منحنی شکل ۲۸-۱۴ می‌شود. ولی به ازای $\mu B \gg kT$ بدیهی است که $M/M_{max} = ۱$ می‌شود که اگر به منحنی شکل ۲۸-۱۴ توجه کنید در می‌یابید که در حالت $B/T \gg ۱$ نسبت M به M_{max} به سمت عدد ۱ میل می‌کند.

بخش ۲۸-۱۱ فرومغناطیس

●●۴۶- GO یک قطب‌نمای مغناطیسی را روی یک سطح افقی قرار می‌دهیم، و می‌گذاریم تا عقربه در وضعیت تعادلش قرار گیرد. سپس، یک ضربهٔ آرام به قطب‌نما وارد می‌کنیم به طوری که عقربه حول وضعیت تعادلش نوسان کند. بسامد نوسان برابر $۰/۳۱۲$ Hz است. میدان مغناطیسی زمین در محل قطب‌نما دارای مؤلفهٔ افقی $۱۸/۰\,\mu$T است. عقربه دارای گشتاور مغناطیسی $۰/۶۸۰$ mJ/T است. لختی چرخشی عقربه را حول محور (قائم) چرخش محاسبه کنید.

حل: از معادله ۲۴-۳۷ (و نیز معادله ۲۴-۳۶ را ببینید) گشتاور وارد بر عقربه را می‌توانیم به صورت $\tau = -\mu B_h \sin\theta$ بنویسیم که علامت منفی مبین آن است که این گشتاور در خلاف جابه‌جایی زاویه‌ای θ (که کوچک و برحسب رادیان فرض شده است) می‌باشد. تقریب زاویه کوچک به $\tau \approx -\mu B_h \theta$ می‌انجامد که این خبر از یک حرکت هماهنگ ساده با ثابت پیچش $\kappa = \mu B_h$ می‌دهد. دوره نوسان یک آونگ پیچشی با $T = ۲\pi\sqrt{I/\kappa}$ داده می‌شود که I لختی دورانی است که به دنبال آن می‌گردیم. چون بسامد با $۰/۳۱۲Hz$ داده شده، دوره نوسان $T = ۱/f \approx ۳/۲s$ می‌شود. بنابراین I چنین می‌شود

$$I = \frac{T^۲\mu^۲B_h^۲}{۴\pi^۲} = \frac{(۳/۲s)^۲(۶/۸۰\times۱۰^{-۴}\ j/T)(۱۸/۰\times۱۰^{-۶}\ T)}{۴\pi^۲}$$
$$= ۳/۱۸۵\times۱۰^{-۹}\ \text{kg}\cdot\text{m}^۲$$

●●۴۷- SSM ILW WWW بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی زمین $۸/۰\times۱۰^{۲۲}$ J/T است. (الف) اگر منشاء این مغناطیس یک کرهٔ آهنی مغناطیده در مرکز زمین باشد، شعاع آن باید چقدر باشد؟ (ب) چنین کره‌ای چه کسری از حجم زمین را اشغال می‌کند؟ فرض کنید دو قطبیها به طور کامل همردیف هستند و چگالی هستهٔ داخلی زمین ۱۴ g/cm^۳ است. گشتاور دو قطبی مغناطیسی اتم آهن $۲/۱\times۱۰^{-۲۳}$ J/T است. (توجه: در واقع چنین تصور می‌شود که هستهٔ داخلی زمین به صورت هم مایع و هم صلب است و قسمتی از آن آهن است، اما آهنربای دائمی به عنوان منبع مغناطیس با ملاحظات چندی کنار گذاشته شده است. یکی از آنها این است که دما مسلماً بالاتر از نقطهٔ کوری است.)

حل: اگر مغناطیدگی کره اشباع شده باشد، گشتاور دوقطبی کل با $\mu_{کل} = N\mu$ داده می‌شود که N تعداد اتم‌های آهن کره و μ گشتاور دوقطبی یک اتم آهنی است. می‌خواهیم شعاع کره آهنی با N اتم آهن را به دست آوریم. جرم چنین کره‌ای برابر Nm است که در آن m جرم هر اتم آهن است. این جرم همچنین برابر با $\rho V = ۴\pi\rho R^۳/۳$ است که ρ چگالی آهن و R شعاع کره است، بنابراین $Nm = ۴\pi\rho R^۳/۳$ می‌شود و از آنجا برای N خواهیم داشت

$$N = \frac{۴\pi\rho R^۳}{۳m}$$

با قرار دادن این مقدار در $\mu_{کل} = N\mu$ به رابطه زیر می‌رسیم

$$\mu_{کل} = \frac{۴\pi\rho R^۳\mu}{۳m}$$

حل آن برای R چنین به دست می‌دهد

$$R = \left(\frac{۳m\mu_{کل}}{۴\pi\rho\mu}\right)^{۱/۳}$$

جرم هر اتم آهن برابر است با

$$m = ۵۶u = (۵۶u)(۱/۶۶\times۱۰^{-۲۷}\ kg/u) = ۹/۳۰\times۱۰^{-۲۶}\ \text{kg}$$

بنابراین شعاع R چنین می‌شود

$$R = \left[\frac{۳(۹/۳۰\times۱۰^{-۲۶})(۸/۰\times۱۰^{۲۲})}{۴\pi(۱۴\times۱۰^{۳})(۲/۱\times۱۰^{-۲۳})}\right]^{۱/۳} = ۱/۸\times۱۰^{۵}\ \text{m}$$

(ب) نسبت به حجم کره به حجم زمین چنین می‌شود

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{۴/۳\,\pi R^۳}{۴/۳\,\pi R_e^۳} = \left(\frac{R}{R_e}\right)^۳$$
$$= \left(\frac{۱/۸۲\times۱۰^{۵}}{۶/۳۷\times۱۰^{-۵}}\right)^۳ = ۲/۳\times۱۰^{-۵}$$

●۴۸- بزرگی گشتاور دو قطبی مربوط به اتم آهن در یک میلهٔ آهنی $۲/۱\times۱۰^{-۲۳}$ J/T است. فرض کنید که تمام اتم‌ها در میله که طول آن $۵/۰$ cm و مساحت سطح مقطع آن $۱/۰$ cm^۲ است گشتاورهای دو قطبی همردیف داشته باشند. (الف) گشتاور دو قطبی میله چقدر است؟ (ب) برای نگهداری این آهنربا به طور عمود بر میدان خارجی $۱/۵$ T، چه گشتاور نیرویی باید اعمال شود؟ (چگالی آهن $۷/۹$ g/m^۳ است.)

حل: (الف)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mn}{V} = \frac{M\frac{N}{NA}}{V} = \frac{MN}{VN_A}$$

$$N = \frac{\rho VN_A}{M}$$

که در آن N_A عدد آووگادرو و V حجم و M جرم اتمی (یا مولکولی) است.

$$N = \frac{(۷/۹\times۱۰^۳)(۵\times۱\times۱۰^{-۶})(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳})}{(۵۵/۸۵\times۱۰^{-۳})} = ۴/۲۵\times۱۰^{۲۳}$$

$$\mu = N\mu_{اتم} = (۴/۲۵\times۱۰^{۲۳})(۲/۱\times۱۰^{-۲۳}) = ۸/۹۳\ \text{J/T}$$

(ب)

$$\tau = \mu B = (۸/۹۳)(۱/۵) = ۱۳/۴\ \text{N}\cdot\text{m}$$

●۴۹- SSM جفت شدگی تبادلی که به عنوان عاملی برای فرومغناطیس در بخش ۲۸-۱۱ ذکر شد، برهم کنش مغناطیسی متقابل بین دو دوقطبی مغناطیسی بنیادی نیست. برای نشان دادن این مطلب، مطلوب است محاسبهٔ (الف) بزرگی میدان مغناطیسی در فاصلهٔ ۱۰ nm در امتداد محور دو قطبی از یک اتم با گشتاور دو قطبی مغناطیسی $۱/۵\times۱۰^{-۲۳}$ J/T (کبالت) و (ب) کمترین انرژی مورد نیاز برای چرخاندن دو قطبی مشابه دوم از یک سر به سر دیگر در این میدان. (پ) با مقایسهٔ مطلب اخیر با نتیجه‌های مسئلهٔ نمونهٔ ۲۸-۳ چه چیزی حاصل می‌شود؟

حل: (الف) میدان مغناطیسی یک دو قطبی روی محور آن با معادله ۲۴-۲۹ داده می‌شود. از آنجا داریم

$$B = \frac{\mu_۰}{۲\pi}\frac{\mu}{z^۳} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})}{۲\pi}\frac{(۱/۵\times۱۰^{-۲۳})}{(۱۰\times۱۰^{-۹}\ \text{m})^۳}$$
$$= ۳/۰\times۱۰^{-۶}\ \text{T} = ۳/۰\,\mu\text{T}$$

(ب) انرژی یک دوقطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی با $U = -\vec{\mu}.\vec{B} = -\mu B\cos\phi$ داده می‌شود که ϕ زاویه میان گشتاور دوقطبی و میدان است. در نتیجه، انرژی لازم برای چرخاندن یک دو قطبی از یک سر به سر دیگر (از $\phi = ۰°$ به $\phi = ۱۸۰°$) چنین می‌شود

$$\Delta U = \mu B(\cos ۰° - \cos ۱۸۰°) = ۲\mu B$$
$$= ۲(۱/۵\times۱۰^{-۲۳})(۳/۰\times۱۰^{-۶}) = ۹/۰\times۱۰^{-۲۹}\ \text{J}$$
$$= ۵/۶۲\times۱۰^{-۱۰}\ \text{eV}$$

با مقایسه با مقدار انرژی جنبشی انتقالی میانگین یک اتم گاز در دمای اتاق، که طبق مسئله نمونه ۲۸-۳ تقریباً برابر با $۰/۰۴$ eV است، نتیجه می‌گیریم که بر هم کنش دوقطبی- دوقطبی نمی‌تواند باعث همردیفی دوقطبی‌ها شود.

●●۵۰- یک میلهٔ مغناطیسی با طول $۶/۰۰$ cm و شعاع $۳/۰۰$ mm و مغناطیدگی $۲/۷۰\times۱۰^۳$ A/m (یکنواخت) می‌تواند نظیر عقربهٔ قطب‌نما حول مرکزش بچرخد. این میله در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی $۳۵/۰$ mT طوری قرار داده می‌شود که گشتاور دو قطبی‌اش با $\vec{B}$ زاویهٔ $۶۸/۰°$ بسازد. (الف) بزرگی گشتاور نیروی وارد بر میله ناشی از $\vec{B}$ چقدر است؟ (ب) اگر زاویه $۳۴/۰°$ تغییر کند، انرژی پتانسیل مغناطیسی میله چقدر تغییر می‌کند؟

حل: (الف) معادله ۲۴-۳۶ چنین به دست می‌دهد

$$\tau = \mu_{میله}B(\cos\theta_f - \cos\theta_i)$$
$$= -(۲۷۰۰)(۰/۰۶)\pi(۰/۰۰۳)^۲(۰/۰۳۵)\times$$
$$[\cos(۳۴°) - \cos(۶۸°)] = -۷۲/۹\,\mu\text{T}$$

●۵۱- مغناطیدگی اشباع M_{max} نیکل فلزی فروٍ مغناطیسی برابر $۴/۷۰\times۱۰^۵$ A/m است. گشتاور دو قطبی مغناطیسی تک اتم نیکل را محاسبه کنید. (چگالی نیکل $۸/۹۰$ g/cm^۳ و جرم مولی آن $۵۸/۷۱$ g/mol است.)

حل: مغناطیدگی اشباع در وضعیت همردیفی تمام دوقطبی‌ها به دست می‌آید. اگر n تعداد اتم‌ها بر یکای حجم باشد، مغناطیدگی اشباع از رابطه $M_{sat} = n\mu$ به دست می‌آید که در آن μ گشتاور دوقطبی مغناطیسی هم اتم است. تعداد اتم‌ها بر یکای حجم از $n = \rho/m$ به دست می‌آید که در آن m هر اتم و برابر $m = M/N_A$ است. بنابراین برای تعداد اتم‌های نیکل در یکای حجم داریم

$$n = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{(۸/۹۰)(۶/۰۲\times۱۰^{۲۳})}{۵۸/۷۱}$$
$$= ۹/۱۲۶\times۱۰^{۲۲}\ /\text{cm}^۳ = ۹/۱۲۶\times۱۰^{۲۸}\ /\text{m}^۳$$

از آنجا گشتاور دوقطبی یک اتم نیکل چنین می‌شود

$$\mu = \frac{M_{sat}}{n} = \frac{۴/۷۰\times۱۰^۵}{۹/۱۲۶\times۱۰^{۲۸}} = ۵/۱۵\times۱۰^{-۲۴}\ \text{A}\cdot\text{m}^۲$$

●۵۲- اندازه‌گیری‌ها در معادن و چاه‌های تجسسی بیانگر این است که دمای داخل زمین برحسب عمق با آهنگ میانگین ۳۰ C°/km افزایش می‌یابد. با فرض اینکه دمای سطح زمین $۱۰°$C است، در چه عمقی آهن دیگر فرومغناطیس نخواهد بود؟ (دمای کوری آهن با فشار خیلی کم تغییر می‌کند.)

حل: اگر دمای یک ماده فرو مغناطیسی از دمای کوری بیشتر شود، جفت شدگی تبادلی از اثر می‌افتد و آن ماده پارامغناطیس می‌شود. دمای کوری برای آهن $۷۷۰°C$ است. اگر x عمقی باشد که در آن دما به این مقدار می‌رسد، آنگاه خواهیم داشت:

$$۱۰° + (۳۰°)x = ۷۷۰°\ \text{C}$$

و از آنجا عمق x به دست می‌آید

$$x = \frac{۷۷۰° - ۱۰°}{۳۰°} = ۲۵/۳۳\ \text{km}$$

●●۵۳- یک حلقهٔ رولند از مادهٔ فرومغناطیس تشکیل شده است. سطح مقطع دایره‌ای آن به شعاع داخلی ۵ cm و شعاع خارجی ۶ cm و با ۴۰۰ دور سیم پیچیده شده است. (الف) چه جریانی باید در سیم پیچ‌ها برقرار شود تا میدان چنبره‌ای با بزرگی $B_۰ = ۰/۲۰$ mT به دست آید؟ (ب) پیچهٔ ثانویهٔ دور چنبره دارای ۵۰ دور و مقاومت $۸/۰\,\Omega$ است. اگر برای این مقدار $B_۰$ داشته باشیم $B_M = ۸۰۰B_۰$، وقتی جریان در سیم‌پیچهای چنبره برقرار شود چه مقدار بار از پیچهٔ ثانویه می‌گذرد؟

حل: (الف) بزرگی میدان مغناطیسی چنبره‌ای با $B_۰ = \mu_۰ n i_P$ داده می‌شود که n تعداد دور در یکای طول چنبره و i_P جریان موردنیاز برای ایجاد این میدان (در غیاب ماده فرو

مغناطیسی) است. اگر r_{avg}، شعاع میانگین باشد، برای n خواهیم داشت

$$n=\frac{N}{l}=\frac{N}{۲\pi r_{\text{avg}}}=\frac{\text{دور}\ ۴۰۰}{۲\pi(۰/۰۵+۰/۰۶)/۲}=۱/۱۶\times۱۰^{۳}\ \text{دور /m}$$

بنابراین i_p چنین می‌شود:

$$i_p=\frac{B_\circ}{\mu_\circ n}=\frac{۰/۲۰\times۱۰^{-۳}}{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱/۱۶\times۱۰^{۳})}=۰/۱۳۸\ \text{A}$$

(ب) اگر Φشار مغناطیسی عبوری از پیچه ثانویه باشد، آنگاه بزرگی emf القا شده در این پیچه با $\varepsilon=N(d\Phi/dt)$ و جریان در پیچه ثانویه با $i_s=\varepsilon/R$ داده می‌شود که R مقاومت این پیچه است. بنابراین داریم

$$i_s=\left(\frac{N}{R}\right)\frac{d\Phi}{dt}$$

آنگاه باری که از پیچه ثانویه می گذرد چنین می‌شود

$$q=\int i_s dt=\frac{N}{R}\int\frac{d\Phi}{dt}dt=\frac{N}{R}\int_\circ^\Phi d\Phi=\frac{N\Phi}{R}$$

از طرفی، میدان مغناطیسی عبوری از پیچه ثانویه دارای بزرگی زیر است:

$$B=B_\circ+B_M=(۱+۸۰۰)B=۸۰۱B_\circ$$

میدان کل عمود بر صفحه پیچه ثانویه است و بنابراین شار مغناطیسی $\Phi=AB$ می‌شود که A مساحت حلقه رولند است (میدان داخل حلقه و نه در فضای میان حلقه و پیچه است). اگر r شعاع مقطع حلقه باشد، $A=\pi r^۲$ می‌شود و از آنجا برای شار مغناطیسی خواهیم داشت

$$\Phi=۸۰۱\pi r^۲B$$

با توجه به اینکه شعاع مقطع حلقه برابر با $r=(۶/۰-۵/۰)/۲=۰/۵۰\text{cm}$ است، برای Φ خواهیم داشت

$$\Phi=۸۰۱\pi(۰/۵۰\times۱۰^{-۲})^۲(۰/۲۰\times۱۰^{-۳})=۱/۲۶\times۱۰^{-۵}\ \text{Wb}$$

در نتیجه برای q خواهیم داشت

$$q=\frac{۵۰(۱/۲۶\times۱۰^{-۵})}{۸/۰}=۷/۸۵\times۱۰^{-۵}\ \text{C}$$

مسئله‌های اضافی

۵۴- با به کاربردن تقریب داده شده در مسئلهٔ ۵۵، مطلوب است (الف) عرض جغرافیایی در بالای سطح زمین در جایی که بزرگی میدان مغناطیسی آن برابر ۵۰٪ مقدار آن روی سطح در همان عرض جغرافیایی باشد، (ب) بزرگی میدان مغناطیسی بیشینهٔ درمرزهسته- جبه ، ۲۹۰۰km زیر سطح زمین و (پ) بزرگی و (ت) میل میدان مغناطیسی زمین در قطب شمال جغرافیایی. توضیح دهید که چرا مقدارهایی که برای (پ) و (ت) محاسبه کرده‌اید با مقدارهای اندازه‌گیری شده متفاوت‌اند.

حل: (الف) در فاصله r از مرکز زمین، بزرگی میدان مغناطیسی با رابطه زیر داده می‌شود

$$B=\frac{\mu_\circ\mu}{۴\pi r^۳}\sqrt{۱+۳\sin^۲\lambda_m}$$

که μ گشتاور دو قطبی مغناطیسی زمین و λ_m عرض مغناطیسی است. بنابراین نسبت بزرگی‌های میدان برای دو فاصله مختلف در یک عرض یکسان چنین می‌شود

$$\frac{B_۲}{B_۱}=\frac{r_۱^۳}{r_۲^۳}$$

که $B_۱$ اندازه میدان روی سطح و $B_۲$ اندازه میدان در جایی است که $B_۲$ نصف $B_۱$ است. $r_۱$را برابر با R_e (شعاع زمین) و $r_۲$ را برابر با R_e+h می‌گیریم که h ارتفاعی است که در آن $B_۲=۰/۵B_۱$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}=\frac{R_e^۳}{(R_e+h)^۳}$$

حال اگر ریشه سوم را از طرفین معادله بالا بگیریم و آن را برای h حل کنیم، خواهیم داشت:

$$h=(۲^{\frac{۱}{۳}}-۱)R_e=(۲^{\frac{۱}{۳}}-۱)(۶۳۷۰)=۱/۶۶\times۱۰^۳\ \text{km}$$

(ب) از عبارتی که برای B در قسمت (الف) مسئله ۷۱ به دست آوردیم، استفاده می‌کنیم. برای بیشینه B، $\sin\lambda_m=۱/۰۰$ قرار می‌دهیم. همچنین $r=۶۳۷۰\text{km}-۲۹۰۰\text{km}=۳۴۷۰\text{km}$ است و بنابراین $B_{\max}$ چنین می‌شود

$$B_{\max}=\frac{\mu_\circ\mu}{۴\pi r^۳}\sqrt{۱+۳\sin^۲\lambda_m}$$

$$=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۰۰\times۱۰^{۲۲})}{۴\pi(۳/۴۷\times۱۰^۶)^۳}=۳/۸۳\times۱۰^{-۴}\ \text{T}$$

(پ) زاویه میان محور مغناطیسی و محور دورانی زمین $۱۱/۵^\circ$ است. بنابراین در قطب شمال جغرافیایی $\lambda_m=۹۰/۰^\circ-۱۱/۵^\circ=۷۸/۵^\circ$ می‌شود. همچنین $r=R_e=۶۳۷۰\,km$ است و در نتیجه B چنین می‌شود

$$B=\frac{\mu_\circ\mu}{۴\pi R_e^۳}\sqrt{۱+۳\sin^۲\lambda_m}$$

$$=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۰\times۱۰^{۲۲})\sqrt{۱+۳\sin^۲ ۷۸/۵^\circ}}{۴\pi(۶/۳۷\times۱۰^۶)^۳}$$

$$=۶/۱۱\times۱۰^{-۵}\ \text{T}$$

(ت) شیب چنین می‌شود

$$\phi_i=\tan^{-۱}(۲\tan ۷۸/۵^\circ)=۸۴/۲^\circ$$

(ث) فرمول به دست آمده در مسئله ۶ براساس تقریب دو قطبی است که به درستی میدان مغناطیسی واقعی زمین را در نزدیکی سطح آن به دست نمی دهد. تقریب دوقطبی در فاصله های دور از مرکز زمین معتبر است.

۵۵- زمین دارای گشتاور دو قطبی مغناطیسی $۸/۰\times۱۰^{۲۲}\ \text{J/T}$ است. (الف) اگر بخواهیم یک دور سیم منفرد دور زمین در استوای جغرافیایی آن همین دو قطبی را ایجاد کند، چه جریانی باید از آن بگذرد؟ آیا چنین آرایشی می‌تواند برای خنثی کردن مغناطیس زمین (ب) در نقطه‌هایی در فضا کاملاً بالای سطح زمین و (پ) روی سطح زمین به کار رود؟

حل: (الف) با استفاده از $\mu=iA=i\pi R_e^۲$، جریان مورد نیاز را به دست می‌آوریم:

$$i=\frac{\mu}{\pi R_e^۲}=\frac{۸/۰\times۱۰^{۲۲}}{\pi(۶/۳۷\times۱۰^۶)^۲}=۶/۲۷\times۱۰^۸\ \text{A}$$

(ب) و (پ) کلاً ساختار میدان مغناطیسی زمین پیچیده است و در ساده‌ترین رویکرد هم این دو میدان متفاوت است و در نتیجه در روی سطح زمین میدان‌های مغناطیسی آنها نمی‌توانند همدیگر را خنثی کنند. ولی در نقاط به حد کافی دور، میدان مغناطیسی هر دو دوقطبی تقریباً مشابه هم می‌شود و می‌توانند همدیگر را خنثی کنند. کلاً تقریب دوقطبی در نقاط خیلی دور از مرکز زمین معتبر است.

۵۶- بار q به طور یکنواخت دور حلقهٔ باریکی به شعاع r توزیع شده است. حلقه حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد و بر صفحهٔ حلقه عمود است با تندی زاویه‌ای ω ، می‌چرخد. (الف) نشان دهید که گشتاور مغناطیسی ناشی از بار در حال چرخش دارای بزرگی $\mu=\frac{۱}{۲}q\omega r^۲$ است. (ب) اگر بار مثبت باشد، این گشتاور مغناطیسی در چه جهتی است؟

حل: (الف) دوره چرخش با $T=۲\pi/\omega$ داده می‌شود. بنابراین، جریان میانگین برابر با $i=q/T=q\omega/۲\pi$ و بزرگی گشتاور دوقطبی مغناطیسی چنین می‌شود:

$$\mu=iA=\frac{q\omega}{۲\pi}\pi r^۲=\frac{۱}{۲}q\omega r^۲$$

(ب) انگشتان دست راست خود را در جهت دوران بپیچانید. چون بار مثبت است، شست در جهت گشتاور دوقطبی می‌شود. که این همان بردار گشتاور زاویه‌ای حلقه است.

۵۷- عقربهٔ یک قطب‌نمای مغناطیسی با جرم $۰/۰۵۰\text{kg}$ و طول $۴/۰\text{cm}$ همردیف مؤلفهٔ افقی میدان مغناطیسی زمین در جایی است که این مؤلفه مقدار $B_h=۱۶\mu\text{T}$ را دارد. پس از اینکه ضربهٔ آرامی به قطب‌نما وارد شود، عقربه با بسامد زاویه‌ای $\omega=۴۵\,\text{rad/s}$ نوسان می‌کند. با فرض اینکه عقربه یک میلهٔ باریک یکنواخت و روی مرکزش سوار شده است، بزرگی گشتاور دو قطبی مغناطیسی آن را به دست آورید.

حل: می‌توانیم از نتیجه مسئله نمونه ۲۸-۴ کتاب استفاده کنیم. با این حال در اینجا آن مراحل دوباره تکرار می‌کنیم. انرژی پتانسیل بر هم کنش بین دو قطبی مغناطیسی عقربه مغناطیسی و میدان مغناطیسی زمین $U=\vec{\mu}.\vec{B}_e=-\mu B_e\cos\theta$ داده می‌شود که θ زاویه میان $\vec{\mu}$ و $\vec{B}_e$ است. برای زاویه کوچک θ داریم

$$U(\theta)=-\mu B_e\cos\theta=-\mu B_e\left(۱-\frac{\theta^۲}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}\kappa\theta^۲-\mu B_e$$

که در آن $\kappa=\mu B_e$ است. آنگاه پایستگی انرژی عقربه چنین به دست می‌دهد

$$\frac{۱}{۲}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^۲+\frac{۱}{۲}\kappa\theta^۲=\text{ثابت}$$

که این، مشابه با پایستگی انرژی مکانیکی دستگاه فنر - جرم است.

$$\frac{۱}{۲}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^۲+\frac{۱}{۲}kx^۲=\text{ثابت}$$

که به $\omega=\sqrt{k/m}$ می‌انجامد. بنابراین در تشابه با این نتیجه خواهیم داشت

$$\omega=\sqrt{\frac{\kappa}{I}}=\sqrt{\frac{\mu B_e}{I}}=\sqrt{\frac{\mu B_e}{ml^۲/۱۲}}$$

که در آن از لختی دورانی یک میله نسبت به محوری که از مرکز آن می‌گذرد، استفاده کردیم. از آنجا برای گشتاور دوقطبی عقربه مغناطیسی خواهیم داشت:

$$\mu=\frac{ml^۲\omega^۲}{۱۲B_e}=\frac{(۰/۰۵۰)(۴/۰\times۱۰^{-۲})^۲(۴۵)^۲}{۱۲(۱۶\times۱۰^{-۶})}$$

$$=۸/۳۴\times۱۰^۲\ \text{J/T}$$

۵۸- خازن شکل ۲۸-۷ با جریان $۲/۵۰\ \text{A}$ پر می‌شود. شعاع سیم $۱/۵۰\text{mm}$ و شعاع صفحه برابر $۲/۰۰\text{cm}$ است. فرض کنید که جریان i در سیم و جریان جابه‌جایی i_d در فاصلهٔ خازن هر دو به طور یکنواخت توزیع شده‌اند. مطلوب است تعیین بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از i در فاصله‌های شعاعی (الف) $۱/۰۰\text{mm}$ (داخل سیم)، (ب) $۳/۰۰\text{mm}$ (خارج از سیم) و (پ) $۲/۲۰\text{cm}$ (خارج از سیم) از مرکز سیم. بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از i_d را در فاصله‌های شعاعی (ت) $۱/۰۰\text{mm}$ (داخل فاصله)، (ث) $۳/۰۰\text{mm}$ (داخل فاصله) و (ج) $۲/۲۰\text{cm}$ (خارج از فاصله) از محور مرکزی میان صفحه‌ها پیدا کنید. (چ) توضیح دهید که چرا میدان برای دو شعاع کوچکتر سیم و فاصله این قدر متفاوت‌اند، اما میدان‌ها برای بزرگترین شعاع متفاوت نیستند.

حل: (الف) میدان مغناطیسی داخل سیم $(r<R)$ با استفاده از معادله ۲۵-۲۰ به دست می‌آید:

$$B=\frac{\mu_\circ ir}{۲\pi R^۲}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲/۵۰)(۱/۰۰\times۱۰^{-۳})}{۲\pi(۱/۵۰\times۱۰^{-۳})^۲}$$

$$=۲/۲۲\times۱۰^{-۴}\ \text{T}$$

(ب) میدان مغناطیسی بیرون سیم $(r>R)$ با استفاده از معادله ۲۵-۱۷ به دست می‌آید:

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲/۵۰)}{۲\pi(۳/۰۰\times۱۰^{-۳})}=۱/۶۷\times۱۰^{-۴}\ \text{T}$$

(پ) مشابه قسمت (ب) داریم

$$B=\frac{\mu_\circ i}{۲\pi r}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲/۵۰)}{۲\pi(۲/۲۰\times۱۰^{-۲})}=۲/۲۷\times۱۰^{-۵}\ \text{T}$$

(ت) معادله ۲۸-۱۶ برای میدان مغناطیسی داخل یک خازن دایره‌ای چنین به دست می‌دهد

$$B=\frac{\mu_\circ i_d r}{۲\pi R^۲}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲/۵۰)(۱/۰۰\times۱۰^{-۲})}{۲\pi(۲/۰۰\times۱۰^{-۲})^۲}$$
$$=۱/۲۵\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{T}$$

توجه کنید که در این قسمت $R=۲/۰۰cm$ شعاع صفحه خازن و $i_d=i=۲/۵۰A$ از پایستگی جریان، قرار داده شد.

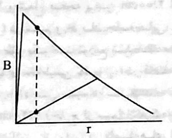
(ث) مشابه قسمت (ت) داریم

$$B=\frac{\mu_\circ i_d r}{۲\pi R^۲}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲/۵۰)(۳/۰۰\times۱۰^{-۲})}{۲\pi(۲/۰۰\times۱۰^{-۲})^۲}$$
$$=۳/۷۵\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{T}$$

(ج) معادله ۲۸-۱۷ برای میدان مغناطیسی بیرون یک خازن دایره‌ای چنین به دست می‌دهد

$$B=\frac{\mu_\circ i_d}{۲\pi r}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲/۵۰)}{۲\pi(۲/۲۰\times۱۰^{-۲})}=۲/۲۷\times۱۰^{-۵}\ \mathrm{T}$$

(چ) چون جریان جابه‌جایی در بین صفحه‌ها روی سطح مقطع‌های بزرگتری توزیع می‌شوند، مقادیر B در میان این صفحه‌ها نسبتاً کوچک است. در بیرون مقطع صفحه‌ها، دو مقدار B یکسان‌اند. (و نیز پرسش ۴ کتاب را ببینید).



۵۹- یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای با شعاع $R=۱۶mm$ و فاصلهٔ $d=۵/۰\ mm$ دارای میدان الکتریکی یکنواخت در میان صفحه‌هاست. با شروع در زمان $t=۰$، اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها برابر $V=(۱۰۰V)e^{-t/\tau}$ است که در آن ثابت زمانی $\tau=۱۲ms$ است. بزرگی میدان مغناطیسی در فاصلهٔ شعاعی $r=۰/۸۰R$ از محور مرکزی (الف) برحسب تابعی از زمان به‌ازای $t\geq۰$ و (ب) در زمان $t=۳\tau$ چقدر است؟

حل: (الف)

$$E=\frac{V}{d}=\frac{V_\circ}{d}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

داریم $(r\leq R)$

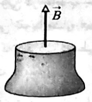
$$B=\frac{\mu_\circ\varepsilon r}{۲}\frac{dE}{dt}=\frac{۱}{۲}\mu_\circ\varepsilon r\frac{V_\circ}{d}\left(-\frac{۱}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$B=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۸\times۱۶\times۱۰^{-۳})\times$$
$$\frac{(۱۰۰)}{(۵\times۱۰^{-۳})}\left(\frac{۱}{۱۲\times۱۰^{-۳}}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}=۱/۲\times۱۰^{-۱۳}\ e^{-\frac{t}{۰/۰۱۲}}$$

(ب)

$t=۳\tau$

$$B=(۱/۲\times۱۰^{-۱۳})e^{-۳}=۵/۹\times۱۰^{-۱۵}\ \mathrm{T}$$

۶۰- شار مغناطیسی $۷/۰mWb$ به طرف خارج از وجه تخت پایین سطح بستهٔ نشان داده شده در شکل ۲۸-۳۹ می‌گذرد. از وجه تخت بالایی (که دارای شعاع $۴/۲cm$ است) میدان مغناطیسی $\vec{B}$ برابر با $۰/۴۰T$ عمود بر وجه می‌گذرد. مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طرف داخل یا به طرف خارج) شار مغناطیسی که از سطح خمیده می‌گذرد.



شکل ۲۸-۳۹ مسئلهٔ ۶۰

حل: (الف) از معادله ۲۸-۱ داریم

$$(\Phi_B)_{in}=(\Phi_B)_{out}=۰/۰۰۷۰+(۰/۴۰)(\pi r^۲)$$
$$=۹/۲\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{Wb}$$

که در آن از $r=۴/۲\times۱۰^{-۲}\ m$ استفاده کردیم.

(ب) علامت شار مثبت شده است و بنابراین سوی شار به سمت داخل است.

۶۱- SSM میدان مغناطیسی زمین را با تقریب می‌توان به عنوان میدان یک دو قطبی مغناطیسی در نظر گرفت که مؤلفه‌های افقی و قائم آن در نقطه‌ای به فاصلهٔ r از مرکز زمین با رابطه‌های زیر داده می‌شوند

$$B_h=\frac{\mu_\circ\mu}{۴\pi r^۳}\cos\lambda_m \quad و \quad B_v=\frac{\mu_\circ\mu}{۲\pi r^۳}\sin\lambda_m$$

که در آنها λ_m *عرض جغرافیایی* است (این نوع عرض جغرافیایی از استوای ژئومغناطیسی به سمت شمال یا جنوب قطب ژئومغناطیسی اندازه‌گیری می‌شود.) فرض کنید که گشتاور دو قطبی مغناطیسی زمین $\mu=۸/۰۰\times۱۰^{۲۲}A.m^۲$ است. (الف) نشان دهید که بزرگی میدان مغناطیسی زمین در عرض جغرافیایی λ_m از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$B=\frac{\mu_\circ\mu}{۴\pi r^۳}\sqrt{۱+۳\sin^۲\lambda_m}$$

(ب) نشان دهید که میل ϕ_i میدان مغناطیسی با این رابطه به عرضی جغرافیایی λ_m مربوط است، $\tan\phi_i=۲\tan\lambda_m$.

حل: (الف) با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$B=\sqrt{B_h^۲+B_v^۲}=\sqrt{\left(\frac{\mu_\circ\mu}{۴\pi r^۳}\cos\lambda_m\right)^۲+\left(\frac{\mu_\circ\mu}{۲\pi r^۳}\sin\lambda_m\right)^۲}$$
$$=\frac{\mu_\circ\mu}{۴\pi r^۳}\sqrt{\cos^۲\lambda_m+۴\sin^۲\lambda_m}=\frac{\mu_\circ\mu}{۴\pi r^۳}\sqrt{۱+۳\sin^۲\lambda_m}$$

که در آن از $\cos^۲\lambda_m+\sin^۲\lambda_m=۱$ استفاده کردیم.

(ب) شیب میدان مغناطیسی چنین می‌شود

$$\tan\phi_i=\frac{B_v}{B_h}=\frac{(\mu_\circ\mu/۲\pi r^۳)\sin\lambda_m}{(\mu_\circ\mu/۴\pi r^۳)\cos\lambda_m}=۲\tan\lambda_m$$

۶۲- با استفاده از نتیجه‌های مسئلهٔ ۵۵ (الف) بزرگی و (ب) میل میدان مغناطیسی زمین در استوای ژئومغناطیسی؛ (پ) بزرگی و (ت) میل در عرض ژئومغناطیسی $۶۰/۰°$؛ و (ث) بزرگی و (ج) میل در قطب ژئومغناطیسی شمال را پیش‌بینی کنید.

حل: (الف) در استوای مغناطیسی $(\lambda_m=۰)$، میدان برابر است با: $B_v=۰$

$$B=B_h=\frac{\mu_\circ\mu}{۴\pi r^۳}=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸/۰۰\times۱۰^{۲۲})}{۴\pi(۶/۳۷\times۱۰^۶)^۳}$$
$$=۳/۱۰\times۱۰^{-۵}\ \mathrm{T}$$

(ب) و شیب میدان چنین می‌شود

$$\tan\phi_i=۲\tan\lambda_m=۰\Rightarrow\phi_i=۰$$

(پ)
$$B=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸\times۱۰^{۲۲})}{(۴\pi)(۶/۳۷\times۱۰^۶)^۳}\sqrt{۱+۳(\sin۶۰°)^۲}$$
$$=۵/۵۹\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{T}$$

(ت)
$$\tan\phi_i=۲\tan۶۰°\Rightarrow\phi_i=۷۳/۹°$$

(ث) در قطب $\lambda_m=۹۰°$ است

$$B_h=۰$$
$$B=B_v=\frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۸\times۱۰^{۲۲})}{(۲\pi)(۶/۳۷\times۱۰^۶)^۳}=۶/۱۹\times۱۰^{-۵}\ \mathrm{T}$$

۶۳- می‌خواهیم یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای با شعاع $۵۵/۰mm$ را پرکنیم. در چه شعاعی (الف) داخل و (ب) خارج از فاصلهٔ خازن بزرگی میدان مغناطیسی القا شده برابر ۵۰/۰٪ بیشینهٔ آن است.

حل: شعاع صفحه خازن را R و فاصله از محور خازن را r در نظر بگیرید. برای نقاط $r\leq R$، بزرگی میدان مغناطیسی با رابطه زیر داده می‌شود

$$B=\frac{\mu_\circ\varepsilon_\circ r}{۲}\frac{dE}{dt}$$

و برای نقاط $r\geq R$

$$B=\frac{\mu_\circ\varepsilon_\circ R^۲}{۲r}\frac{dE}{dt}$$

بیشینه میدان مغناطیسی در $r=R$ رخ می‌دهد که آن را می‌توانیم با هر کدام از دو رابطه بالا به دست آوریم:

$$B=\frac{\mu_\circ\varepsilon_\circ R}{۲}\frac{dE}{dt}$$

دو مقدار برای r وجود دارد که به ازای آنها $B=B_{max}/۲$ است، یکی کوچکتر از R و یکی بزرگتر از آن.

(الف) برای یافتن آن شعاعی که کوچکتر از R است، معادله زیر را برای r حل می‌کنیم

$$\frac{\mu_\circ\varepsilon_\circ r}{۲}\frac{dE}{dt}=\frac{\mu_\circ\varepsilon_\circ R}{۴}\frac{dE}{dt}$$

و از آنجا $r=R/۲=(۵۵/۰)/۲=۲۷/۵mm$ می‌شود.

(ب) برای یافتن آن شعاعی که بزرگتر از R است، معادله زیر را برای r حل می‌کنیم

$$\frac{\mu_\circ\varepsilon_\circ R^۲}{۲r}\frac{dE}{dt}=\frac{\mu_\circ\varepsilon_\circ R}{۴}\frac{dE}{dt}$$

و از آنجا $r=۲R=۲(۵۵/۰)=۱۱۰mm$ می‌شود.

۶۴- نمونه‌ای از یک نمک پارامغناطیسی که منحنی مغناطیدگی شکل ۲۸-۱۴ برای آن برقرار است در یک میدان مغناطیسی $۲/۰T$ غوطه‌ور است. در چه دمایی درجهٔ اشباع مغناطیسی نمونه (الف) ۵۰٪ و (ب) ۹۰٪ خواهد بود؟

حل: (الف)

$$\frac{M}{M_{max}}=\frac{\mu}{\mu_{max}}=\frac{۵۰}{۱۰۰}=۰/۵$$

با استفاده از منحنی، این نقطه تقریباً در $\frac{B}{T}=۰/۵$ روی می‌دهد.

$$\frac{۲}{T}=۰/۵\Rightarrow T=۴K$$

(ب)

$$\frac{M}{M_{max}}=\frac{۹۰}{۱۰۰}=۰/۹$$

با استفاده از منحنی، این نقطه در $\frac{B}{T}=۲$ روی می‌دهد.

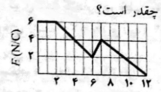
$$\frac{۲}{T}=۲\Rightarrow T=۱K$$

۶۵- می‌خواهیم یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای به شعاع R را تخلیه کنیم، جریان جابه‌جایی از میان ناحیهٔ دایره‌ای مرکزی، موازی با صفحه‌ها با شعاع $R/۲$ برابر $۲/۰A$ است. جریان موقع تخلیهٔ خازن چقدر است؟

حل:

$$\frac{i'_d}{i_d}=\frac{\pi r^۲}{\pi R^۲}$$
$$\frac{۲}{i_d}=\frac{\left(\frac{R}{۲}\right)^۲}{R^۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow i_d=۸A$$

۶۶- شکل ۲۸-۴۰ تغییرات یک میدان مغناطیسی را که عمود بر سطحی دایره‌ای به مساحت $۲/۰m^۲$ است به دست می‌دهد. در طول دورهٔ زمانی نشان داده شده، بزرگترین جریان جابه‌جایی گذشته از سطح چقدر است؟



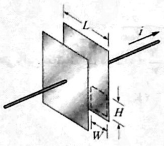
شکل ۲۸-۴۰ مسئلهٔ ۶۶

حل: با چشم‌پوشی از نقاطی که تعیین شیب در آنجا دشوار است، بازه‌ای که در آن $\Delta|\vec{E}|/\Delta t$ بیشترین مقدار است را

$۶\mu s < t < ۷\mu s$ می‌یابیم. در طی این بازه، از معادله ۲۸-۱۴ داریم

$$i_d = \varepsilon_\circ A \frac{\Delta|\vec{E}|}{\Delta t} = (۸/۸۵\times۱۰^{۱۲})(۲/۰)(۲/۰\times۱۰^{۶})$$
$$= ۳/۵\times۱۰^{-۵}\ \text{A}$$

۶۷- در شکل ۲۸-۴۱، می‌خواهیم یک خازن صفحه – موازی را با جریان $i = ۵/۰\ \text{A}$ تخلیه کنیم. صفحه‌ها مربع به ضلع $L = ۸/۰۰\text{mm}$ هستند. (الف) آهنگی که با آن میدان الکتریکی میان صفحه‌ها تغییر می‌کند چقدر است؟ (ب) مقدار $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$ دور مسیر خط‌چین، که در آن $H = ۲/۰\text{mm}$ و $W = ۳/۰\text{mm}$، چقدر است؟



شکل ۲۸-۴۱ مسئلهٔ ۶۷

حل: $i_d = i = ۵\text{A}$

(الف) $i_d = \varepsilon_\circ \frac{d\Phi}{dt} = \varepsilon_\circ A \frac{dE}{dt}$

$$۵ = (۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۸\times۱۰^{-۳})^{۲} \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = ۸/۸۳\times۱۰^{۱۵}$$

(ب)

$$\oint_c \vec{B}.\vec{ds} = \mu_\circ i'_d$$

i'_d مقداری از جریان جابه‌جایی است که از درون حلقه C می‌گذرد.

$$\frac{i'_d}{w\times l} = \frac{i_d}{L^{۲}} \Rightarrow i'_d = \frac{w\times H}{L^{۲}} i$$
$$i'_d = \frac{(۳)(۲)}{(۸)^{۲}}(۵) = ۰/۴۷A$$
$$\oint_c B.ds = (۴\pi\times۱۰^{-۷})(۰/۴۷) = ۵/۹\times۱۰^{-۷}\ \text{T}\cdot\text{m}$$

۶۸- مؤلفهٔ اندازه‌گیری شدهٔ گشتاور دو قطبی مغناطیسی مداری الکترون با مقدارهای (الف) $m_l = ۳$ و (ب) $m_l = -۴$ چقدر است؟

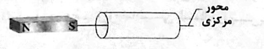
حل: (الف) با استفاده از معادله ۲۸-۳۱ داریم

$$\mu_{orb,z} = -۳\mu_B = -۳(۹/۲۸\times۱۰^{-۲۴}) = -۲/۷۸\times۱۰^{-۲۳}\ \text{J/T}$$

(ب) به همان ترتیب، به ازای $m_l = -۴$، داریم

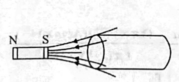
$$\mu_{orb,z} = -۴\mu_B = -۳(۹/۲۸\times۱۰^{-۲۴}) = -۳/۷۱\times۱۰^{-۲۳}\ \text{J/T}$$

۶۹- در شکل ۲۸-۴۲ یک آهنربای میله‌ای در نزدیکی یک استوانهٔ کاغذی قرار دارد. (الف) خطهای میدان مغناطیسی را که از سطح استوانه می‌گذرند رسم کنید. (ب) علامت $\vec{B}\cdot d\vec{A}$ برای هر مساحت $d\vec{A}$ چیست؟ (پ) آیا این با قانون گاوس برای مغناطیس مغایر است؟ توضیح دهید؟



شکل ۲۸-۴۲ مسئلهٔ ۶۹

حل: (الف)



(ب) برای المان‌های روی سطح جداره استوانه، $\overrightarrow{dA}$ عمود بر سطح به طرف بیرون آن است.
(پ) خیر: چون شار کل روی سطح جانبی صفر نیست و این با قانون گاوس مغایرت ندارد زیرا قانون گاوس برای سطوح بسته است و نه سطوح باز.

۷۰- در پایین‌ترین حالت انرژی اتم هیدروژن، محتمل‌ترین فاصلهٔ یک الکترون منفرد از پروتون مرکزی (هسته) برابر $۵/۲\times۱۰^{-۱۱}\text{m}$ است. (الف) بزرگی میدان الکتریکی پروتون در این فاصله را حساب کنید. بزرگی اندازه‌گیری شدهٔ مؤلفهٔ $\mu_{s,z}$ گشتاور دو قطبی مغناطیسی اسپینی پروتون روی محور z برابر $۱/۴\times۱۰^{-۲۶}\text{J/T}$ است.(ب) بزرگی میدان مغناطیسی پروتون را در فاصلهٔ $۵/۲\times۱۰^{-۱۱}\text{m}$ روی محور z حساب کنید. (راهنمایی: معادلهٔ ۲۵-۲۷ را به کار ببرید.) (پ) نسبت گشتاور دو قطبی مغناطیسی الکترون به گشتاور دو قطبی مغناطیسی پروتون چقدر است؟

حل: $E = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۲}} = \frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۵/۲\times۱۰^{-۱۱})^{۲}}(۹\times۱۰^{۹})$

$$= ۵/۳۳\times۱۰^{۱۱}\ \text{V/m}$$

(ب) از رابطه (۲۵-۲۷) داریم:

$$B = \frac{\mu_\circ}{۲\pi}\frac{\mu}{z^{۳}}$$

$$B = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})}{(۲\pi)}\frac{(۱/۴\times۱۰^{-۲۶})}{(۵/۲\times۱۰^{-۱۱})^{۳}} = ۱/۹۹\times۱۰^{-۲}\ \text{T}$$

یا ۱۹/۹mT

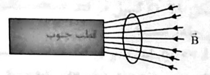
(ج) از رابطه (۳۲-۲۵) داریم:

$$\mu_e = \frac{eh}{۴\pi n_e}$$
$$\mu_p = \frac{eh}{۴\pi m_p}$$

$$\frac{\mu_e}{\mu_p} = \frac{m_p}{m_e} = \frac{(۱/۶۷\times۱۰^{۲۶})}{(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱})} = ۱۸۳۳$$

۷۱- شکل ۲۸-۳۷ یک مدل حلقه‌ای (حلقهٔ L) را برای یک مادهٔ دیامغناطیسی نشان می‌دهد. (الف) خطهای میدان مغناطیسی ناشی از آهنربا را که از میان و اطراف ماده می‌گذرند، رسم کنید. (ب) گشتاور دو قطبی مغناطیسی خالص حلقه $\vec{\mu}$، (پ) جریان قراردادی i در حلقه (ساعتگرد یا پادساعتگرد در شکل)، و (ت) نیروی مغناطیسی وارد برحلقه، در کدام جهت‌اند؟

حل: (الف) نمای از خطوط میدان (ناشی از حضور آهنربای میله‌ای) در پایین رسم شده است.



(ب) برای ماده‌های پارامغناطیسی، گشتاور دو قطبی $\vec{\mu}$ در همان جهت میدان خارجی $\vec{B}$ است. از شکل بالا درمی‌یابیم که $\vec{\mu}$ در جهت $x-$ می‌شود.
(پ) از قاعده دست راست درمی‌یابیم که چون $\vec{\mu}$ در جهت $x-$ است، جریان از دید آهنربای میله‌ای در جهت پادساعتگرد شارش می‌یابد.
(ت) اثر $\vec{F}$، حرکت ماده به سمت ناحیه‌هایی با مقادیر بزرگتر $|\vec{B}|$ است. چون $\vec{B}$ در جهت فلش‌های خطوط میدان افزایش می‌یابد، بنابراین جهت $\vec{F}$ به سمت چپ، یعنی $x-$ می‌شود.

۷۲- دو صفحه (مطابق شکل ۲۸-۷) با جریان ثابتی تخلیه می‌شوند. هر صفحه دارای شعاع $۴/۰۰\text{cm}$ است. در حین تخلیه، در نقطه‌ای میان صفحه‌ها در فاصلهٔ شعاعی $۲/۰۰\text{cm}$ از محور مرکزی، بزرگی میدان مغناطیسی برابر $۱۲/۵\text{nT}$ است. (الف) بزرگی میدان مغناطیسی در فاصلهٔ شعاعی $۶/۰۰\text{cm}$ چقدر است؟ (ب) جریان در سیمی که دو صفحه را به هم متصل می‌کند چقدر است؟

حل: (الف) در فضای داخل خازن $B_۱ = \mu_\circ i_d r_۱ / ۲\pi R^{۲}$ است (معادله ۲۸-۱۶ را ببینید). در خارج خازن میدان مغناطیسی با $B_۲ = \mu_\circ i_d / ۲\pi r_۲$ داده می‌شود (معادله ۲۸-۱۷ را ببینید). در نتیجه برای $B_۲$ داریم:

$$B_۲ = \frac{B_۱ R^{۲}}{r_۱ r_۲} = \frac{(۱۲/۵)(۴/۰۰)^{۲}}{(۲/۰۰)(۶/۰۰)} = ۱۶/۶۶n\text{T}$$

(ب) جریان جابه‌جایی را می‌توانیم با استفاده از هر یک از دو عبارت $B_۱$ یا $B_۲$ به دست آوریم. با استفاده از $B_۱$ داریم

$$i_d = \frac{۲\pi B_۱ R^{۲}}{\mu_\circ r_۱} = \frac{۲\pi(۱۲/۵)(۴/۰۰\times۱۰^{-۲})^{۲}}{(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۲/۰۰\times۱۰^{-۲})} = ۵/۰۰\text{mA}$$

۷۳- SSM اگر الکترونی در یک اتم دارای اندازه حرکت زاویه‌ای مداری با مقدارهای m_l که به ±۳ محدودند باشد، الکترون چند مقدار (الف) $L_{\text{orb},z}$ و (ب) $\mu_{\text{orb},z}$ می‌تواند داشته باشد؟ برحسب h، m و e بزرگترین مقدار مجاز برای (پ) $L_{\text{orb},z}$ و (ت) $\mu_{\text{orb},z}$ چقدر است؟ (ث) بزرگترین مقدار مجاز برای مؤلفهٔ z اندازه حرکت زاویه‌ای خالص الکترون (مداری به علاوهٔ اسپینی) چقدر است؟ (ج) چند مقدار (علامت‌ها را در نظر بگیرید) برای مؤلفهٔ z اندازه حرکت زاویه‌ای خالص آن مجازند؟

حل: (الف)

$$m_L = ۰,\pm۱,\pm۲,\pm۳$$

داریم:

$$L_{o,z} = m_L \frac{h}{۲\pi}$$

تعداد $L_{o,z}$ به تعداد m_L یعنی هفت عدد می‌باشد.

(ب) داریم: $\mu_{o,z} = -m_L \frac{eh}{۴\pi m}$

تعداد حالت‌های $\mu_{o,z}$ به تعداد m_L یعنی هفت عدد می‌باشد.
(پ) بیشترین مقدار مجاز برای $L_{o,z}$ برابر است با:

$$(L_{o,z})_m = ۳\frac{h}{۲\pi}$$

(ت) $(\mu_{o,z})_m = ۳\frac{eh}{۴\pi m}$

(ث) داریم $S_z = m_s \frac{h}{۲\pi} \qquad m_s = \pm\frac{۱}{۲}$

$$(S_z)_m = \frac{۱}{۲}\frac{h}{۲\pi}$$
$$j_z = L_{o,z} + S_z$$
$$(j_z)_m = ۳\frac{h}{۲\pi} + \frac{۱}{۲}\frac{h}{۲\pi} = ۳/۵\frac{h}{۲\pi}$$

(ج) با توجه به اینکه ۷ حالت برای $L_{o,z}$ و دو حالت برای S_z امکان دارد.

$$i_z = \pm\frac{۱}{۲}\frac{h}{۲\pi} + m_L\frac{h}{۲\pi} \qquad m_L = ۰,\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۴$$

مجموعاً ۱۴ حالت امکان دارد که فقط ۸ حالت آنها مستقل هستند و بقیه تکرار می‌گردند.

۷۴- می‌خواهیم یک خازن صفحه- موازی با صفحه‌های دایره‌ای را پرکنیم. یک حلقهٔ دایره‌ای هم مرکز با محور مرکزی واقع در میان صفحه‌ها را در نظر بگیرید. اگر شعاع حلقه $۳/۰۰\ \text{cm}$ بزرگتر از شعاع صفحه باشد، وقتی میدان مغناطیسی در طول حلقه دارای بزرگی $۲/۰۰\mu\text{T}$ باشد، جریان جابه‌جایی میان صفحه‌ها چقدر است؟

حل: در حالی که $r > R$ می‌باشد.

$$B = \frac{\mu_۰ i_d}{۲\pi r}$$

$$۲\times۱۰^{-۶} = \frac{(۴\pi\times۱۰^{-۷})\, i_d}{(۲\pi)(۳\times۱۰^{-۲})}$$

$$i_d = ۰/۳\,\mathrm{A}$$

۷۵- فرض کنید که حدود مقدارهای m_l برای الکترون در اتم ±۴ باشد. (الف) برای مؤلفه z گشتاور دو قطبی مغناطیسی مداری $\mu_{\text{orb},z}$ چند مقدار متفاوت امکانپذیر است؟ (ب) بزرگترین این مقدارهای ممکن چیست؟ حال، فرض کنید که اتم در یک میدان مغناطیسی به بزرگی ۰/۲۵۰T ، در جهت مثبت محور z قرار گیرد. (پ) انرژی پتانسیل بیشینه و (ت) انرژی پتانسیل کمینه مربوط به این مقدارهای ممکن $\mu_{\text{orb},z}$ چقدرند؟

حل: (الف) مجموعه کلیه مقادیر، ۹ مقدار ۴+ و ۳+ و ۲+ و ۱+ و ۰ و ۱- و ۲- و ۳- و ۴- می‌شود.

(ب) $۴\mu_B = ۴(۹/۲۸\times۱۰^{-۲۴}) = ۳/۷۱\times۱۰^{-۲۳}\ \mathrm{J/T}$ بزرگترین مقدار ممکن است.

(پ) اگر نتیجه قسمت (ب) را در ۰/۲۵۰ ضرب کنیم به $U = +۹/۲۷\times۱۰^{-۲۴}\ \mathrm{J}$ می‌رسیم.

(ت) به همان ترتیب برای حد پایین‌تر به $U = -۹/۲۷\times۱۰^{-۲۴}\ \mathrm{J}$ می‌رسیم.